doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.009

一个二项式等式的推广和证明*

刘涛涛, 韩聪聪

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:主要是利用了部分分解定理,采用一种新的方法——部分分解法,对二项式等式进行了一种新的方法证明,从而也推广与证明了一些著名的二项式等式.

关键词:二项式等式;部分分解定理;部分分解法

中图分类号:O156　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)07-0040-03

1　预备知识

部分分解定理是组合数学的一个重要组成部分,在文献[1,2]中可以看到一些关于部分分解定理与部分分解法的知识,下面根据需要将部分分解定理写成如下的形式:

引理 1　z 是任意的复数,$n,r\in \mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$,$\beta,\gamma>0$ 则

$$\frac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}\left(\frac{\beta}{z+\gamma}\right)^r=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\frac{\beta}{k+\gamma}\right)^r\frac{1}{z-k}+\frac{\lambda}{(\gamma+z)^r}+\cdots+\frac{\mu}{\gamma+z}\tag{1}$$

证明　应用标准的部分分解定理,有

$$f(z)=\frac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}\left(\frac{\beta}{z+\gamma}\right)^r=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{z-k}+\frac{\lambda}{(\gamma+z)^r}+\cdots+\frac{\mu}{\gamma+z}$$

其中,系数 A_k 可以由下面的推导得到

$$A_k=\lim_{z\to k}(z-k)f(z)=\lim_{z\to k}\frac{n!}{z(z-1)\cdots(z-k+1)(z-k-1)\cdots(z-n)}\left(\frac{\beta}{z+\gamma}\right)^r=\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(\frac{\beta}{k+\gamma}\right)^r$$

类似引理 1 的证明,可以证明引理 2 成立.

引理 2　z 是任意的复数,$n,r\in \mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$,$\beta>0,0\leqslant\gamma\leqslant n$,则

$$\frac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}\left(\frac{\beta}{z-\gamma}\right)^r=\sum_{k=0,k\neq\gamma}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\frac{\beta}{k-\gamma}\right)^r\frac{1}{z-k}+\frac{\lambda}{(z-\gamma)^r}+\cdots+\frac{\mu}{z-\gamma}\tag{2}$$

2　著名二项式等式的新证明与推广

部分分解定理在组合数学中有着很重要的应用,这里将利用部分分解定理采用部分分解的方法对二项

收稿日期:2014-11-21;**修回日期**:2014-12-27.

* **基金项目**:重庆市自然科学基金项目资助(CSTC2011JJA00024).

作者简介:刘涛涛(1989-),男,甘肃清水人,硕士研究生,从事特殊函数和组合数学研究.

等式进行证明.与此同时,在所证明的二项式等式中取特殊值,可以得到一些著名的二项式等式.即:推广了著名二项式等式;采用了新的方法——部分分解法证明了的二项式等式.

定理 1　若 $n,r\in\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$,$\beta,\gamma>0$,那么

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{\beta}{\gamma+k}\right)^r=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{\gamma+k}\right)\left(\sum_{0\leqslant k_1\cdots\leqslant k_{r-1}\leqslant n}\frac{\beta^r}{\gamma(\gamma+k_1)\cdots(\gamma+k_{r-1})}\right)\tag{3}$$

证明　利用引理 1,首先给式(1)两边同时乘以 z,然后让 $z\to\infty$,可得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{\beta}{\gamma+k}\right)^r+\mu=0$$

其中,$\mu=[(z+\gamma)^{-1}]\dfrac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}\left(\dfrac{\beta}{\gamma+z}\right)^r=$

$$[(z+\gamma)^{r-1}]\frac{\beta^r n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}=$$

$$[z^{r-1}]\frac{\beta^r n!}{(z-\gamma)(z-1-\gamma)\cdots(z-n-\gamma)}=$$

$$(-1)^{n+1}\frac{\beta^r n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\gamma+k)}[z^{r-1}]\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\gamma}\right)\left(1-\frac{z}{\gamma+1}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{\gamma+n}\right)}=$$

$$(-1)^{n+1}\frac{\beta^r n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\gamma+k)}[z^{r-1}]\left(\sum_{j\geqslant0}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^j\right)\left(\sum_{j\geqslant0}\left(\frac{z}{\gamma+1}\right)^j\right)\cdots\left(\sum_{j\geqslant0}\left(\frac{z}{\gamma+n}\right)^j\right)=$$

$$(-1)^{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{\gamma+k}\right)\left(\sum_{0\leqslant k_1\cdots\leqslant k_{r-1}\leqslant n}\frac{\beta^r}{\gamma(\gamma+k_1)\cdots(\gamma+k_{r-1})}\right)$$

定理 2　若 $n,r\in\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$,$\beta>0$,$0\leqslant\gamma\leqslant n$,那么

$$\sum_{k=0,k\neq\gamma}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{\beta}{k-\gamma}\right)^r=(-1)^{\gamma+1}\binom{n}{\gamma}\sum_{\substack{0\leqslant k_1\cdots\leqslant k_r\leqslant n\\k_1,\cdots,k_r\neq\gamma}}\frac{\beta^r}{(k_1-\gamma)\cdots(k_r-\gamma)}\tag{4}$$

证明　利用引理 2,首先给式(2)两边同时乘以 z,然后让 $z\to\infty$,可得

$$\sum_{k=0,k\neq\gamma}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{\beta}{k-\gamma}\right)^r+\mu=0$$

其中,

$$\mu=[(z-\gamma)^{-1}]\frac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}\left(\frac{\beta}{z-\gamma}\right)^r=$$

$$[(z-\gamma)^r]\frac{\beta^r n!}{z(z-1)\cdots(z-\gamma+1)(z-\gamma-1)\cdots(z-n)}=$$

$$[z^r]\frac{\beta^r n!}{(z+\gamma)(z+\gamma-1)\cdots(z+1)(z-1)\cdots(z+\gamma-n)}=$$

$$(-1)^{n-\gamma}\frac{\beta^r n!}{\gamma!\ (n-\gamma)!}[z^r]\frac{1}{\left(1-\frac{z}{-\gamma}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{-1}\right)\left(1-\frac{z}{1}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{n-\gamma}\right)}=$$

$$(-1)^{n-\gamma}\beta^r\binom{n}{\gamma}[z^r]\left(\sum_{j\geqslant0}\left(\frac{z}{-\gamma}\right)^j\right)\cdots\left(\sum_{j\geqslant0}\left(\frac{z}{-1}\right)^j\right)\left(\sum_{j\geqslant0}\left(\frac{z}{1}\right)^j\right)\cdots\left(\sum_{j\geqslant0}\left(\frac{z}{n-\gamma}\right)^j\right)=$$

$$(-1)^{n-\gamma}\binom{n}{\gamma}\sum_{\substack{0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_r\leqslant n\\k_1,\cdots,k_r\neq\gamma}}\frac{\beta^r}{(k_1-\gamma)\cdots(k_r-\gamma)}$$

Jonathon Peterson 在文献[3]中已经给出了用求概率的方法,对二项式等式(5)给出了一个有趣的概率证明.

推论 1[3] 若所有的 $\theta>0$,并且所有的 $n\in\mathbf{N}$,那么

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{\theta}{\theta+k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta}{\theta+k} \tag{5}$$

证明 在式(3)中取 $r=1,\beta=\gamma=\theta$,并且定义 $\prod_{k=n+1}^{n}=1,\sum_{i=1}^{0}=0$,推论 1 得证.

推论 2[3] 若所有的 $\theta>0$,并且所有的 $n,m\in\mathbf{N}$,那么

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\left(\frac{\theta}{\theta+k}\right)^{m}=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{\theta+k}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{1\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_j\leqslant n}\frac{\theta^{j}}{(\theta+k_1)\cdots(\theta+k_j)}\right) \tag{6}$$

证明 在式(3)中取 $r=m,\beta=\gamma=\theta$,推论 2 得证.

Kirschenhofer 在文献[4]中已经采用给出了差分求导数的方法,对二项式等式(7)和(8)给出了证明.

推论 3[4] 若 $n,d\in\mathbf{N}_0$,那么

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\frac{M}{(M+k)^{d}}=\binom{n+M}{M}\left(\frac{1}{M^{d-1}}+\sum_{1\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_{d-1}\leqslant n}\frac{1}{(M+k_1)\cdots(M+k_j)}\right) \tag{7}$$

证明 在式(3)中取 $r=d,\beta=1,\gamma=M$,推论 3 得证.

推论 4[4] 若 $n,d\in\mathbf{N}_0,0\leqslant M\leqslant n$,那么

$$\sum_{k=0,k\neq M}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\frac{1}{(k-M)^{d}}=(-1)^{M+1}\binom{n}{M}\left(\frac{1}{(-M)^{d}}+\sum_{\substack{1\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_d\leqslant n\\ k_1,\cdots,k_d\neq M}}\frac{1}{(k_1-M)\cdots(k_d-M)}\right) \tag{8}$$

证明 在式(4)中取 $r=d,\beta=1,\gamma=M$,推论 4 得证.

注 可以看得出来,在利用部分分解方法证明定理 1 和定理 2 的同时,对著名的二项式等式做了一定的推广.当然,也可以类似证明定理 1 和定理 2 的过程,在证明过程中取特殊值,也即是用新方法——部分分解法,来证明著名二项式.

参考文献:

[1] PRODINGER H. Identities Involving Harmonic Numbers that Are of Interest for Physicists[J]. Util Math, 2010(83):291-299

[2] CHU W. Partial-fraction Decompositions and Harmonic Number Identities[J]. J Combin Math Combin Comput, 2007(60):139-153

[3] JONATHON P. A Probabilistic Proof of a Binomial Identity[J]. The American Mathematical Monthly, 2013(120):558-562

[4] KIRSCHENHOFER P. A Note on Alternating Sums[J]. Electron J Combin, 1996(3):78-80

The Proof and Generalization of Binomial Identities

LIU Tao-tao, HAN Cong-cong

(School of mathematics Science, Chongqing normal university, Chongqing 401331, China)

Abstract: According to partial-fraction decompositions theorem, with partial-fraction decompositions, new technique, this paper proposes a new method to prove binomial identities, and meanwhile, some well-known binomial identities are proved and generalized.

Keywords: binomial identities; partial-fraction decompositions theorem; partial-fraction decompositions