doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.007

积分算子的线性性和有界性*

耿立刚, 曾 静
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:积分算子在数学中是作用在函数上的作用子,根据其核函数的不同,可以得到不同的积分算子;研究了积分算子的线性性及有界性等算子的代数性质,得出了积分算子是线性算子,并且在某些特定情况下还是有界算子,从而是连续的线性算子的结论.

关键词:积分算子;线性;有界性
中图分类号:O172 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)07-0033-03

在泛函分析中,积分算子 T 又称积分变换是具有 $(Tf)(u)=\int_{t_1}^{t_2}K(t,u)f(t)\,\mathrm{d}t$ 形式的变换.此变换把函数映为函数,是把函数空间映到函数空间上的变换.其中的 $K(t,u)$ 是个确定的二元函数,称为此积分算子的核函数或核,$f(t)$ 称为象原函数,$Tf(u)$ 称为象函数.当选取不同的积分域或核函数时,就得到不同的积分变换.积分变换常用来处理微分方程的问题,常见的积分变换有 Fourier 变换、Laplace 变换、Mellin 变换、Abel 变换及 Hilbert 变换等.此处将对积分算子的一些代数性质如线性性、有界性等进行研究.

1 积分算子的线性性

定理 1 设算子 T 是从函数空间 X 到函数空间 Y 上的算子,如果对于任意的 $f,g\in X$ 以及常数 α 都有式(1)(2)成立:

$$T(f+g)=Tf+Tg \tag{1}$$

$$T(\alpha f)=\alpha Tf \tag{2}$$

则称算子 T 是从 X 到 Y 的线性算子.

定理 2 积分算子 $T:X\to Y$ 是线性算子.

证明 设 $f,g\in X$,α 是任一常数,则对于积分算子 T,根据积分的性质有

$$\begin{aligned}T(f+g)(u)=&\int_{t_1}^{t_2}K(t,u)(f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\\&\int_{t_1}^{t_2}K(t,u)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}K(t,u)g(t)\,\mathrm{d}t=\\&(Tf)(u)+(Tg)(u)\end{aligned}$$

即 $T(f+g)=Tf+Tg$.

收稿日期:2014-11-23;**修回日期**:2014-12-20.
* **基金项目**:国家自然科学基金天元基金项目资助(11426046);重庆市教委项目资助(KJ120704).
作者简介:耿立刚(1984-),男,山东泰安人,讲师,博士研究生,从事算子理论及算子代数研究.

$$T(\alpha f)(u)=\int_{t_1}^{t_2}K(t,u)\alpha f(t)\mathrm{d}t=\alpha(Tf)(u)$$

即 $T(\alpha f)=\alpha(Tf)$,即证积分算子 T 是线性算子.

2 积分算子的有界性

算子 T 的范数指的是算子范数,定义为

$$\|T\|=\sup\left\{\frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X},f\in X,f\neq 0\right\}$$

对于算子 T,如果$\|T\|<\infty$,则称算子 T 是有界算子.根据积分的性质,易知积分算子是否有界与核函数 $K(t,u)$及积分域有关.

定理 3 如果一个积分算子的积分域是有界集,并且核函数是有界函数,那么这个积分算子是有界算子.

证明 由假设,核函数 $K(t,u)$是有界的,不妨设$|K(t,u)|\leqslant M$,由定积分的保不等式性,有

$$\begin{aligned}|Tf(u)|&=\left|\int_{t_1}^{t_2}K(t,u)f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\\&\int_{t_1}^{t_2}|K(t,u)f(t)|\mathrm{d}t\leqslant\\&M\|f\|_X(t_2-t_1)=M_1\|f\|_X\end{aligned}$$

由此可得$\|Tf\|_Y\leqslant M_1\|f\|_X$,则$\|T\|\leqslant M_1<\infty$,即积分算子 T 是有界线性算子.

定理 4 如果一个积分算子 T 的积分域是有界集,并且核函数是有界函数,那么这个积分算子 T 是连续的.

证明 因线性算子的有界性和连续性是等价的,由定理 3,积分算子在所假设条件下是有界的,故积分算子 T 在定理假设条件下是连续的.

3 单位圆盘上的积分型算子

记$\mathbb{D}$为复平面$\mathbb{C}$上的单位圆盘,即$\mathbb{C}$上所有满足$|z|<1$ 的复数 z 的全体,用 $H(\mathbb{D})$表示$\mathbb{D}$上所有解析函数的全体,其上的范数定义为上确界范数.设 $g\in H(\mathbb{D})$,$z\in\mathbb{D}$,对于任意的$f\in H(\mathbb{D})$,定义 $H(\mathbb{D})$上的积分型算子 J_g 为

$$J_g f(z)=\int_0^z f(\xi)g'(\xi)\mathrm{d}\xi$$

根据积分的性质,易知 J_g 的有界性.

定理 5 积分算子 J_g 是有界的线性算子当且仅当 $g(z)$是$\mathbb{D}$上的有界函数.

证明 充分性:由 J_g 的定义,$|z|<1$,积分域是有界的,根据定理 3 可得积分算子 J_g 是有界算子.

必要性:由算子范数定义

$$\|J_g\|=\sup\left\{\frac{\|J_g f\|}{\|f\|},f\in H(\mathbb{D})\right\}\leqslant|g(z)-g(0)|$$

又因当$f=1$ 时,$|J_gf(z)|=|g(z)-g(0)|$,故$\|J_g\|=|g(z)-g(0)|$,因此,若 J_g 是有界算子,则 $g(z)$在$\mathbb{D}$上必是有界函数.

积分算子在泛函分析领域的研究中具有广泛的应用,并且在一些具体的理论研究中起着关键性的作用.根据 Schwarz 核定理,如果核函数是个广义的函数,所有的线性算子都是积分算子.Frodholm 理论就是对一般

积分方程理论的研究,在 Frodholm 理论中,核一般是 Banach 函数空间上的紧算子.在此情形下,核有时也称为 Frodholm 算子、核算子及 Frodholm 核等.

参考文献:

[1] 欧阳光中,朱学炎,金福临,等.数学分析[M].3 版.北京:高等教育出版社,2007

[2] POLYANIN A D,MANZHIROV A V.Handbook of Integral Equations[M].CRC Press,Boca Raton,1998

[3] MANZHIROV R K,THAMBYNAYAGAM.The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers[M].McGraw-Hill,New York,2011

Linearity and Bounded Properties of Integral Operators

GENG Li-gang,ZENG Jing

(School of Mathematics and Statistics,Chongqing Technology and Business University,Chongqing 400067,China)

Abstract: An integral operator is an operator acting on the functions. Different kernel functions result in different integral operators.This paper studies the linearity and bounded properties of integral operators and finds that the integral operator is linear and bounded.

Key words: integral operator; linearity; bounded

(上接第 32 页)

参考文献:

[1] 邱森,朱林生.高等代数探究性课题集[M].武汉:武汉大学出版社,2008

[2] 张守贵.一类二阶常系数微分方程特解的教学探讨[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(12):11-14

[3] 方辉平,叶鸣.二阶变系数齐线性微分方程的求解[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(1):14-17

[4] 同济大学数学教研室.高等数学[M].5 版.北京:高等教育出版社,2007

[5] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组.高等代数[M].3 版.北京: 高等教育出版社,2003

Inverse Matrix Method for Special Solutions of Some Constant Coefficient Non-homogeneous Linear Differential Equations

QIANG Cheng-xiu

(Longqiao College,Lanzhou University of Finance and Economics,Lanzhou 730100,China)

Abstract: According to the thoughts that derivation operation can be viewed as the inverse of indefinite integral,by inverse matrix this paper discusses some special solutions to non-homogeneous linear differential equations.General formulas for solving this kind of problems are obtained and proofs and numerical examples are given.

Key words: non-homogeneous linear differential equations;special solutions;inverse matrix