第 32 卷第 7 期　　重庆工商大学学报(自然科学版)　　2015 年 7 月
Vol. 32　NO.7　　J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed)　　Jul.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.003

关于几类分式函数迭代问题的研究*

向静婧, 金渝光**
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:主要讨论分式函数的迭代问题.先从研究有理分式出发,用数学归纳法和共轭相似法讨论几类有理线性分式函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+ax}$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, $c(ad-bc)\neq 0$ 的 n 次迭代问题,并以此为结论再讨论了几类无理分式 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[k]{1+ax^k}}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+2a\sqrt{x}+a^2x}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[k]{a+bx^k}}$, $a,b\in\mathbf{R}$, $k=1,2,3,\cdots$ 的函数迭代,给出了它们的次迭代式.

关键词:分式函数;迭代;共轭相似;序列
中图分类号:O122　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)07-0016-04

现有的求函数迭代的方法有定义法、不动点法和共轭相似法.迭代运算比一般的代数运算复杂得多,尤其是非线性的迭代.迭代普遍存在于自然界,因此,人们自然关心次迭代 $f^n(x)$ 的计算与估计.文献[1,2]给出一些可迭代的函数,但远远不够的.在此基础上,运用共轭相似法和数学归纳法对某些分式函数求出它们的迭代式,同时,用序列方法求线性分式函数次迭代的一般计算公式.根据这一公式可以非常迅速地求出任意线性分式函数的次迭代.

1　基础知识

1.1　迭　代

设 $f(x)$ 是定义于集合 M 上,且在其中取值的映射.若 M 是数集合,$f(x)$ 就是一个函数,这时,对于 M 中的任一个 x,$f(f(x))$,$f(f(f(x)))$ 都是有意义的.记

$$f^0(x)=x, f^n(x)=f(f^{n-1}(x)), x\in M, n=0,1,2,\ldots$$

称 $f^n(x)$ 为 $f(x)$ 的次迭代,n 为 f^n 关于 f 的迭代指数.

1.2　迭代的方法

介绍两种求迭代函数的方法[1-2].

数学归纳法:观察函数 f 的低次迭代式的基本形式,找出迭代式的规律,再根据观察到的规律猜想次迭代式的表达式,最后用数学归纳法进行严谨证明即可.

收稿日期:2014-10-08;**修回日期**:2014-11-24.
*基金项目:2013 年重庆高校创新团队建设计划资助项目(KJPB201308).
作者简介:向静婧(1989-),女,四川宜宾人,硕士研究生,从事拓扑动力系统研究.
通讯作者:金渝光(1956-),男,浙江乐清人,教授,硕士生导师,E-mail:tsgjyg@ aliyun.com.

共轭相似法：把复杂的函数迭代化成较简单的函数迭代，直观地说，如果存在可逆函数 $h(x)$，使函数 f 和 g 满足 $f=h^{-1}\circ g\circ h$ 就称 f 和 g 共轭，也称为相似，记为 $f\sim g.h(x)$，称为桥函数.

2　有理线性分式函数的迭代

1）类型 1：形如分式函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+ax}$，$a\in\mathbf{R}$，设桥函数 $h(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $h^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$，由共轭相似 $f(x)=h^{-1}\circ g\circ h(x)$，可得

$$g(x)=h\circ f\circ h^{-1}(x)=h\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{a}{x}}\right)=h\left(\frac{1}{a+x}\right)=a+x$$

由数学归纳法很容易得到 $g(x)=a+x$ 的函数迭代式 $g^n(x)=x+na$.

从而有

$$f^n(x)=h^{-1}\circ g^n\circ h(x)=h^{-1}\left(\frac{1}{x}+na\right)=h^{-1}\left(\frac{1+nax}{x}\right)=\frac{x}{1+nax}$$

2）求线性分式函数的迭代除了上述介绍的几种基本方法外，还可化为矩阵的乘幂和函数序列的迭代问题进行计算[3]. 下述用函数序列[4]的方法得到线性分式函数 n 次迭代的一般计算公式.

类型 2：形如分式函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，$c(ad-bc)\neq 0$.

首先定义序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，

$$a_0=x,b_0=1,a_n=b_{n-1}(af^{n-1}+b),b_n=b_{n-1}(cf^{n-1}+d) \tag{1}$$

从而

$$f^0(x)=x=\frac{a_0}{b_0},f^n(x)=\frac{a_n}{b_n} \tag{2}$$

把式(2)代入式(1)得到

$$a_n=aa_{n-1}+bb_{n-1} \tag{3}$$

$$b_n=ca_{n-1}+db_{n-1} \tag{4}$$

根据式(3)和式(4)得

$$a_{n+1}-(a+d)a_n+(ad-bc)a_{n-1}=0(n>1)$$

$$b_{n+1}-(a+d)b_n+(ad-bc)b_{n-1}=0(n>1)$$

其特征方程为

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0 \tag{5}$$

$$a_0=x,a_1=ax+b,b_0=1,b_1=cx+d$$

设 α,β 为式(5)的两个根，当 $(a+d)^2-4(ad-bc)=0$ 时，两根 α,β 相同，均为 $\dfrac{a+d}{2}$，则

$$a_n=[(ax+b-\alpha x)n+\alpha x]\alpha^{n-1}$$

$$b_n=[(cx+d-\alpha)n+\alpha]\alpha^{n-1}$$

得

$$f^n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{(ax+b-\alpha x)n+\alpha x}{(cx+d-\alpha)n+\alpha}=\frac{[(a-d)n+a+d]x+2bn}{2cnx+a+d+(d-a)n}$$

当 $(a+d)^2-4(ad-bc)\neq 0$ 时，$\alpha\neq\beta$，则

$$a_n=\frac{1}{\alpha-\beta}[(ax+b-\beta x)\alpha^n-(ax+b-\alpha x)\beta^n]$$

$$b_n=\frac{1}{\alpha-\beta}[(cx+d-\beta)\alpha^n-(cx+d-\alpha)\beta^n]$$

得

$$f^n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{(ax+b-\beta x)\alpha^n-(\alpha x+b-\alpha x)\beta^n}{(cx+d-\beta)\alpha^n-(cx+d-\alpha)\beta^n}=\frac{[(\alpha-\beta)\alpha^n-(a-\alpha)\beta^n]x+b(\alpha^n-\beta^n)}{c(\alpha^n-\beta^n)x+(d-\beta)\alpha^n+(\alpha-d)\beta^n}$$

推论 1 若 $f(x)=\frac{1}{a+bx}$,$a,b\in\mathbf{R}$ 并且 $b\neq0$,则 $f(x)$ 的次迭代式为

$$f^n(x)=\begin{cases}\frac{(-an+a)x+2n}{2bnx+a+an}, & a^2+4b\neq0\\ \frac{(-\beta\alpha^n+\alpha\beta^n)x+(\alpha^n-\beta^n)}{b(\alpha^n-\beta^n)x+(\alpha-\beta)\alpha^n+(\alpha-a)\beta^n}, & a^2+4b=0\end{cases}$$

其中 α,β 为方程 $x^2-ax-b=0$ 两个根.

证明方法同上.

3 无理非线性分式函数的迭代

利用上述有理线性分式函数迭代式通式的结论,可以解决一些非线性分式函数[5,6]的迭代问题.

1) 类型 1:形如分式函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt[k]{1+ax^k}}$,$a\in\mathbf{R}$,$k\in\mathbf{N}$,取桥函数 $h(x)=x^k$,则 $h^{-1}(x)=\sqrt[k]{x}$,利用共轭相似关系求得

$$g(x)=h(f(h^{-1}(x)))=h\left(\sqrt[k]{\frac{x}{1+ax}}\right)=\frac{x}{1+ax}$$

由类型 1 可知 $g(x)$ 的 n 次迭代式 $g^n(x)=\frac{x}{1+nax}$,故可得

$$f^n(x)=h^{-1}(g^n(h(x)))=h^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+na\sqrt{x}}\right)=\frac{x}{(1+na\sqrt{x})^2}$$

2) 类型 2:形如分式函数 $f(x)=\frac{x}{1+2a\sqrt{x}+a^2x}$,设桥函数 $h(x)=\sqrt{x}$,$h^{-1}(x)=x^2$,由共轭相似法可得

$$g(x)=h\circ f\circ h^{-1}(x)=h\left(\frac{x^2}{1+2ax+a^2x^2}\right)=\frac{x}{1+ax}$$

同样,由类型 1 可知 $g(x)$ 的 n 次迭代式 $g^n(x)=\frac{x}{1+nax}$,从而

$$f^n(x)=h^{-1}(g^n(h(x)))=h^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+na\sqrt{x}}\right)=\frac{x}{(1+na\sqrt{x})^2}$$

3) 类型 3:形如分式函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[k]{a+bx^k}}$,$a,b\in\mathbf{R}$,$k=1,2,3,\cdots$,设桥函数 $h(x)=x^k$,$h^{-1}(x)=\sqrt{x^k}$,由共轭相似法可得

$$g(x)=h\circ f\circ h^{-1}(x)=\frac{1}{a+bx}$$

由上述讨论线性分式函数的结论知,$g(x)$的 n 次迭代式

$$g^n(x)=\begin{cases}\dfrac{(-an+a)x+2n}{2bnx+a+an}, a^2+4b\neq 0\\[2ex] \dfrac{(-\beta\alpha^n+\alpha\beta^n)x+(\alpha^n-\beta^n)}{b(\alpha^n-\beta^n)x+(\alpha-\beta)\alpha^n+(\alpha-a)\beta^n}, a^2+4b=0\end{cases}$$

故

$$f^n(x)=h^{-1}(g^n(h(x)))=\begin{cases}\sqrt[k]{\dfrac{(-an+a)x^k+2n}{2bnx^k+a+an}}, a^2+4b\neq 0\\[2ex] \sqrt[k]{\dfrac{(-\beta\alpha^n+\alpha\beta^n)x^k+(\alpha^n-\beta^n)}{b(\alpha^n-\beta^n)x^k+(\alpha-\beta)\alpha^n+(\alpha-a)\beta^n}}, a^2+4b=0\end{cases}$$

参考文献:

[1] 张伟年.动力系统基础[M].北京:高等教育出版社,2001

[2] 张景中,熊金城.函数迭代与一维动力系统[M].成都:四川教育出版社,1992

[3] 熊金城.点集拓扑讲义[M].2 版.北京:高等教育出版社,1997

[4] 徐璐,徐绍元.关于线性分式函数的次迭代及其应用[J] .数学的实践与认识 ,2006,28(5):225-228

[5] 樊汝萍.几类函数的桥函数[J] .重庆工商大学学报:自然科学版,2014,31(4):8-12

[6] 张荣.关于几类函数的迭代问题[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2007,24(1):22-25

Research on Iteration of Several Kinds of Fractional Functions

XIANG Jing-jing, JIN Yu-guang

(School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Mainly on iteration of fractional function, firstly, this paper researches rational fraction discussing some kinds of rational iterative linear fractional functions, such as, $f(x)=\dfrac{x}{1+ax}$. Based on the conclusion, iteration of irrational fraction, such as, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[k]{a+bx^k}}$, and their iterative function are given.

Key words: fractional function; iteration; conjugate similar; sequence