doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0005.013

一类推广的薛定谔—泊松系统的可解性*

丁 凌, 庄常陵

(湖北文理学院 数学与计算机科学学院,湖北 襄阳 441053)

摘 要:研究了在球上的具有临界非线性项的一类推广的薛定谔-泊松系统,此系统还含有一个在原点和无穷原点都是渐近线性的一般非线性项;并用变分方法中的山路引理证明了其正解的存在性.

关键词:薛定谔-泊松系统; 渐近线性; 山路引理

中图分类号:O175.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)05-0043-06

1 背景和主要结论

考虑下面具有临界非线性项的一类推广的薛定谔-泊松系统:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + q|u|^3 u\varphi, x \in B_R \\ -\Delta\varphi = q|u|^5, x \in B_R \\ u = \varphi = 0, x \in \partial B_R \end{cases} \tag{1}$$

其中 $q>0$, B_R 是 R^3 中具以 0 点为球心,以 $R>0$ 为半径的球. f 满足如下的条件:

(f1) $f\in C(\Re,\Re^+)$,$f(0)=0$,$f(s)\geqslant 0$ 对所有的 $s>0$ 成立,$f(s)=0$ 对所有的 $s<0$ 成立,其中$\Re^+=\{s:s\geqslant 0\}$;

(f2) $\lim\limits_{s\to 0^+}\dfrac{f(s)}{s}=\alpha\in\left(\dfrac{3}{10}\lambda_1,\lambda_1\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(s)}{s}=\beta\in(0,\alpha)$, 其中 $\lambda_1>0$ 表示$(-\Delta,H_0^1(B_R))$的第一个特征值,即

$$\lambda_1 = \inf_{0\neq u\in H_0^1(B_R)} \frac{\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\int_{B_R}|u|^2\mathrm{d}x} \tag{2}$$

(f3) $\dfrac{F(s)}{s^2}$关于 $s>0$ 是非减的,其中 $F(s)=\int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t$;

(f4) $\dfrac{1}{2}\alpha s^2\geqslant F(s)\geqslant\dfrac{1}{2}\beta s^2$, 其中 $s\in\Re^+$.

系统(1)来源于物理里的经典模型, 由 Schrödinger 方程和 Poisson 方程耦合的系统(1)描述了带电粒子在电磁场的相互作用[1]. 特别在寻找静电类的解时就必须解系统(1). 根据量子力学里的数学公式知道, 当质量为 m 电荷为 q 的粒子在具有向量势 $A(x,t)$ 和数量势 $\varphi(x,t)$ 的作用下运动, 其波函数 $\psi(x,t)$ 满足下面的 Schrödinge 类方程:

$$\mathrm{i}\frac{\hbar}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{2\pi\mathrm{i}}\nabla-\frac{q}{c}A\right)^2\psi+\omega\psi-q\varphi|\psi|^3\psi-f(\psi),t\in\Re^+,x\in\Re^3 \tag{3}$$

这里 i 是虚单位, $\hbar$ 是 Planck 常数, c 是光在真空里的速度, g 是 Gauge 不变函数. 方程(3)的右边

收稿日期:2014-07-28;修回日期:2014-10-20.

* 基金项目:湖北省教育厅科学技术研究计划重点项目(D20122501).

作者简介:丁凌(1975-),女,湖北襄阳人,副教授,博士,从事偏微分方程研究.

$(\frac{\hbar}{2\pi i}\nabla-\frac{q}{c}A)^2$表示向量的数量积,即

$$(\frac{\hbar}{2\pi i}\nabla - \frac{q}{c}A)^2\psi = -(\frac{\hbar}{2\pi})^2\Delta\psi + (\frac{q^2}{c^2}|A|^2 - \frac{q\hbar}{2\pi ic}\mathrm{div}A)\psi - \frac{q\hbar}{2\pi ic}(A\cdot\nabla\psi)$$

用文献[1-3]同样的观点,考虑带电粒子在自身的电磁场里的相互作用.假定电磁场不是给定的,这样不得不解一个未知函数为粒子的波函数和与波函数相关势函数 A,φ 的系统,电磁场的势函数由下面 Maxwell 的方程给定:

$$-\mathrm{div}(\frac{1}{c}A_t + \nabla\varphi) = q|\psi|^5 \tag{4}$$

如果假定 $A=0$,φ 不依赖时间 t 且波函数为驻波,则

$$\psi(x,t) = u(x)\exp(-\frac{2\pi i\omega t}{\hbar})$$

这里 $u:\mathfrak{R}^3\to\mathfrak{R}$.此时 Maxwell 方程(4)就退化为 Poisson 方程.令 $\hbar^2=2m$,根据式(3),函数 u 和 φ 在 Dirichlet 边界条件下在 B_R 上的系统就是系统(1).

定理 1 假定 $q>0$ 和(f1)-(f4)成立,则系统(1)有一个正解.

注记 1 定理 1 的一类推广的薛定谔-泊松正解的存在性结论.文献[4]只研究了线性情况,即 $f(s)=s$;文献[5]只研究了次临界及 $q>0$ 的情况.此处的研究是对文献[4]中研究的问题和结果的推广和补充.

用 $\|\cdot\|_p$ 表示 L^p 范数,$\|\cdot\|=(\|\nabla\cdot\|_2^2+\|\cdot\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$表示 $H_0^1(B_R)$ 的范数,$\varphi_1(x)>0$ 表示 λ_1 的特征函数,用 $C_i(i=1,2,\cdots)$ 表示不同的正常数.

2 主要结果的证明

系统(1)有变分结构,事实上,考虑泛函 $J:H_0^1(B_R)\times H_0^1(B_R)\to\mathfrak{R}$且

$$J(u,\varphi) = \frac{1}{2}\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x - \int_{B_R}F(u)\mathrm{d}x - \frac{q}{5}\int_{B_R}|u|^5\varphi\mathrm{d}x + \frac{1}{10}\int_{B_R}|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x$$

由(f1)(f2)知 $J\in C^1(H_0^1(B_R)\times H_0^1(B_R))$,对任意的 $v,\eta\in H_0^1(B_R)$,J 在(u,φ)的偏导数为

$$\left[\frac{\partial J(u,\varphi)}{\partial u},v\right] = \int_{B_R}\nabla u\nabla v\mathrm{d}x - \int_{B_R}f(u)v\mathrm{d}x - q\int_{B_R}|u|^4\varphi v\mathrm{d}x$$

$$\left[\frac{\partial J(u,\varphi)}{\partial u},\eta\right] = -\frac{q}{5}\int_{B_R}|u|^5\eta\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_{B_R}\nabla\varphi\nabla\eta\mathrm{d}x$$

显然,(u,φ)是系统(1)的弱解当且仅当(u,φ)是 J 在 $H_0^1(B_R)\times H_0^1(B_R)$上的临界点.另外泛函 J 是强无界的(下方无界或者上方无界),但根据文献[1]介绍的思想可以克服这一困难.那就是对于每一个 $u\in H_0^1(B_R)$,用 $\Phi(u)\in H_0^1(B_R)$表示问题(5)的唯一解:

$$\begin{cases}-\Delta_\varphi = q|u|^5, x\in B_R\\ \varphi = 0, x\in\partial B_R\end{cases} \tag{5}$$

则映射 $\Phi:H_0^1(B_R)\to H_0^1(B_R)$可用隐函数$\frac{\partial J(u,\varphi)}{\partial u}=0$ 定义,并且$\frac{\partial J}{\partial\varphi}$的偏导数为

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\varphi\partial u}(u,\varphi)[\eta,\omega] = -q\int_{B_R}|u|^4\eta\omega\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\varphi\partial u}(u,\varphi)[\eta_1,\eta_2] = \frac{1}{5}\int_{B_R}\nabla\varphi\nabla\eta_1\eta_2\mathrm{d}x$$

是连续的,所以 Φ 是 C^1 的且 $\Phi(u)\geqslant 0$.再根据式(5)和嵌入的连续性,有

$$\int_{B_R}|\nabla\Phi(u)|^2\mathrm{d}x = q\int_{B_R}\Phi(u)|u|^5\mathrm{d}x \tag{6}$$

和

$$\|\nabla\Phi(u)\|_2\leqslant\frac{q}{\sqrt{S}}\|u\|_6^5\leqslant\frac{q}{s^3}\|\nabla(u)\|_2^5$$

从而有

$$\|\nabla\Phi(u)\|_2\leqslant\frac{q}{\sqrt{S}}u_6^5\leqslant\frac{q}{S^3}\nabla u_2^5 \tag{7}$$

其中 $S=\inf\limits_{v\in H_0^1(B_R)}\dfrac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_6^2}$.

这样就可以定义约化泛函 $I:H_0^1(B_R)\to R$ 为 $I(u)=J(u,\Phi(u))$，考虑式(6)可得

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_{B_R}F(u)\mathrm{d}x-\frac{1}{10}\int_{B_R}|\nabla\Phi(u)|^2\mathrm{d}x$$

显然 I 是 C^1 的，对任意 $u,v\in H_0^1(B_R)$，有

$$[I'(u),v]=\left[\frac{\partial J}{\partial u}(u,\Phi(u)),v\right]+\left[\frac{\partial J}{\partial u}(u,\Phi(u))\circ\ \Phi'(u),v\right]=$$
$$\int_{B_R}\nabla u\nabla v\mathrm{d}x-\int_{B_R}f(u)v\mathrm{d}x-q\int_{B_R}|u|^3u\Phi(u)v\mathrm{d}x$$

根据文献[1]，知道 $(u,\Phi(u))\in H_0^1(B_R)\times H_0^1(B_R)$ 是 J 的临界点当且仅当 u 是 I 的临界点.

引理 1　假定 f 满足(f1)－(f4)，则

1) 存在 $\rho,a>0$ 使得 $I(u)\geqslant a$ 对所有的满足 $u\in H_0^1(B_R)$，$u=\rho$ 的 u 成立；

2) 存在 $e\in\Re\backslash B_\rho(0)$ 使得 $I(e)<0$.

证明　1) 根据(f1)－(f2)，对任意 $\varepsilon>0$ 和 $r\in(1,5)$，存在 $C=C(\varepsilon)>0$ 使得对任意的 $s\in\Re$，有

$$|F(s)|\leqslant\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)|s|^2+C|s|^{r+1} \tag{8}$$

选取 $\varepsilon>0$ 使得 $\alpha+\varepsilon<\lambda_1$.联合式(2)(7)(8)和 Sobolev 嵌入定理，可得到

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_{B_R}F(u)\mathrm{d}x-\frac{1}{10}\int_{B_R}|\nabla\Phi(u)|^2\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)\int_{B_R}u^2\mathrm{d}x-C\int_{B_R}|u|^{r+1}\mathrm{d}x-\frac{q^2}{10S^6}\left(\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^5\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2\lambda_1}(\alpha+\varepsilon)\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-C_1\|u\|^{r+1}-\frac{q^2}{10S^6}\left(\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^5\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_1}(\alpha+\varepsilon)\right)\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-C_1\|u\|^{r+1}-\frac{q^2}{10S^6}\left(\int_{B_R}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^5\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_1}(\alpha+\varepsilon)\right)\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\|u\|^2-C_1\|u\|^{r+1}-\frac{q^2}{10S^6}\|u\|^{10} \tag{9}$$

从式(9)可知，存在一个充分小 ρ 和 $a>0$，使得对所有的满足 $u\in H_0^1(B_R)$，$u=\rho$ 的 u 成立.

2) 因为在 $B_R(0)$ 上的特征函数 $\varphi_1(x)>0$，对 $t>0$ 且 $t\to+\infty$，再根据式(6)和(f4)可得

$$\frac{I(t\varphi_1)}{t^2}=\frac{1}{2}\int_{B_R}|\nabla\varphi_1|^2\mathrm{d}x-\int_{B_R}\frac{F(t\varphi_1)}{t^{2\varphi_1^2}}\varphi_1^2\mathrm{d}x-\frac{1}{10}\int_{B_R}|\nabla\Phi(t\varphi_1)|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\int_{B_R}|\nabla\varphi_1|^2\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2}\int_{B_R}\varphi_1^2\mathrm{d}x-\frac{qt^5}{10}\int_{B_R}|\varphi_1|^5|\Phi\ (t\varphi_1)|^2\mathrm{d}x\to-\infty$$

取 $e=t\varphi_1$，令 T 充分大，当 $t>T$ 使得 $\|e\|>\rho$ 且 $I(e)<0$.证毕.

从引理 1 可以看出泛函满足山路定理的几何结构[6]，故存在一个(PS)序列 $\{u_n\}$ 满足

$$I(u_n)\to c>0,I'(u_n)\to 0\ 当\ n\to\infty$$

其中 $c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leqslant\gamma\leqslant1}I(\gamma(\tau))$，$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H_0^1(B_R)):\gamma(0)=0,\gamma(1)=e\}$ 是连接 0 到 e 的连续路径.

定理 1 的证明　首先证明(PS)序列 $\{u_n\}$ 是有界序列.根据(f3)和(f4)可得 $\beta s^2\leqslant 2F(s)\leqslant f(s)s$.于是有

$$\frac{1}{2}\beta s^2 \leqslant F(s) \leqslant \frac{1}{2}f(s)s$$

对任意的 $s\in\Re$都成立.取 $2<\frac{2(\lambda_1-\beta)}{\lambda_1-\alpha}<\theta<10$,则$(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})+(\frac{\beta}{\theta}-\frac{\alpha}{2})\frac{1}{\lambda_1}>0$.再根据$\{u_n\}$是(PS)序列可得

$$c+o(1)=I(u_n)-\frac{1}{\theta}<I'(u_n),u_n>=$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\int_{B_R}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\int_{B_R}(\frac{1}{\theta}f(u_n)u_n-F(u_n))\mathrm{d}x+(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{10})\|\nabla\varphi(u_n)\|_2^2\geqslant$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\int_{B_R}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\left(\frac{\beta}{\theta}-\frac{\alpha}{2}\right)\int_{B_R}|u_n|^2\mathrm{d}x\geqslant\left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\beta}{\theta}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\int_{B_R}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x$$

从而存在某个常数 C_2 使得

$$\int_{B_R}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\leqslant C_2$$

故由式(2)得到

$$\|u_n\|\leqslant\sqrt{\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)C_2}$$

因此$\{u_n\}$是有界的.

其次证明系统(1)有一个正解.由上面知序列$\{u_n\}$有界,存在着一个弱收敛的子列仍然记为$\{u_n\}$收敛到 u.下面证明 $u\neq0$,用反证法.如果 $u\neq0$,则 $u_n\xrightarrow{\text{弱收敛}}u$ 于 $H_0^1(B_R)$,故有 $u_n\to0$ 于 $L^p(B_R)(P\in[2,6))$.根据$(f1)-(f3)$,$\int_{B_R}f(u_n)u_n\mathrm{d}x\to0$ 和$\int_{B_R}F(u_n)\mathrm{d}x\to0$.因为$\{u_n\}$是(PS)序列,所以有

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2-\frac{1}{10}\|\nabla\Phi(u_n)\|_2^2=c+o(1)\tag{10}$$

$$\|\nabla u_n\|_2^2=\|\nabla\Phi(u_n)\|_2^2=o(1)\tag{11}$$

根据式(10)、(11)可得

$$\|\nabla u_n\|_2^2=\frac{5}{2}c+o(1)$$

$$\|\nabla\Phi(u_n)\|_2^2=\frac{5}{2}c+o(1)$$

因为$\|\nabla\Phi(u_n)\|_2\leqslant\frac{q}{s^3}\|\nabla u_n\|_2^5$,可得

$$c\geqslant\frac{2}{5}\sqrt{\frac{S^3}{q}}$$

现在考虑一个固定的光滑函数 $\varphi=\varphi(r)$使得 $\varphi(0)=1,\varphi'(0)=0$ 且 $\varphi(R)=0$.令 $r=|x|$和 $u_\varepsilon(r)=\frac{\varphi(r)}{(\varepsilon+r^2)^{\frac{1}{2}}}$,则有如下的估计:

$$\begin{cases}\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2=S\dfrac{K}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}+\omega\displaystyle\int_0^R|\varphi'(r)|^2\mathrm{d}r+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\\ \|\nabla u_\varepsilon\|_6^6=\dfrac{K}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\\ \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2=\omega\displaystyle\int_0^R\varphi(r)^2\mathrm{d}r+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\end{cases}\tag{12}$$

其中 K 是一个正常数,ω 是$\Re^3$中单位球面积,这些估计见文献[7].

对临界值 c 进行估计.在系统(1)的第二个方程两边乘以$|u|$然后再积分,然后用 Young 不等式可得

$$q\|u\|_6^6=\int_{B_R}(\nabla\Phi(u),\nabla|u|)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla\Phi(u)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2\tag{13}$$

可以定义 $\psi,\widetilde{\psi}:H_0^1(B_R)\to\Re$ 如下

$$\psi(u)=\frac{3}{5}\int_{B_R}\nabla|u|^2\mathrm{d}x-\int_{B_R}F(u)\mathrm{d}x-\frac{q}{5}\int_{B_R}|u|^6\mathrm{d}x$$

$$\widetilde{\psi}=\frac{3}{5}\int_{B_R}\nabla|u|^2\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{2}\int_{B_R}|u|^2\mathrm{d}x-\frac{q}{5}\int_{B_R}|u|^6\mathrm{d}x$$

根据式(13),可得 $I(u)\leqslant\psi(u)$.对任意的 $u\in H_0^1(B_R)$ 有 $c\leqslant\inf\limits_{u\in H_0^1(B_R)\setminus\{0\}}\sup\limits_{t>0}\psi(tu)$.

因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(tu_\varepsilon)=-\infty$, $\psi(0)=0$, $\lim\limits_{t\to0^+}\psi(tu_\varepsilon)>0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\widetilde{\psi}(tu_\varepsilon)=-\infty$, $\widetilde{\psi}(0)=0$, $\lim\limits_{t\to0^+}\widetilde{\psi}(tu_\varepsilon)>0$,可得 $\sup\limits_{t>0}\psi(tu_\varepsilon)$ 和 $\sup\limits_{t>0}\widetilde{\psi}(tu_\varepsilon)$ 存在.再由(f4)知

$$\sup_{t>0}\psi(tu_\varepsilon)\leqslant\sup_{t>0}\widetilde{\psi}(tu_\varepsilon)\tag{14}$$

令 $\sup\limits_{t>0}\widetilde{\psi}(tu_\varepsilon)=\widetilde{\psi}(t_\varepsilon u_\varepsilon)$,其中 $t_\varepsilon>0$ 并且满足

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\psi}(tu_\varepsilon)}{\mathrm{d}t}=0$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\psi}(tu_\varepsilon)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_\varepsilon}=\frac{6t_\varepsilon}{5}\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2-\alpha t_\varepsilon\|u_\varepsilon\|_2^2-\frac{6qt_\varepsilon^5}{5}\|u_\varepsilon\|_6^6=0$$

解得

$$t=\frac{1}{\|u_\varepsilon\|_6}\sqrt[4]{\frac{\frac{6}{5}\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2-\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2}{\frac{6}{5}q\|u_\varepsilon\|_6^2}}=\frac{1}{\|u_\varepsilon\|_6}\sqrt[4]{\frac{S}{q}+A(\varphi)\varepsilon^{\frac{1}{2}}+O(\varepsilon)}$$

其中

$$A(\varphi)=\frac{\omega}{qK}\int_0^R\left(|\varphi'(r)|^2-\frac{5}{6}\alpha\varphi^2(r)\right)\mathrm{d}r$$

于是

$$\begin{aligned}&\sup_{t>0}\widetilde{\psi}(tu_\varepsilon)=\widetilde{\psi}(t_\varepsilon u_\varepsilon)=\\&\frac{3t_\varepsilon^2}{5}\int_{B_R}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\frac{\alpha t_\varepsilon^2}{2}\int_{B_R}|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\frac{qt_\varepsilon^6}{5}\int_{B_R}|u_\varepsilon|^6\mathrm{d}x=\\&\frac{2q}{5}\sqrt{\left(\frac{S}{q}+A(\varphi)\varepsilon^{\frac{1}{2}}+O(\varepsilon)\right)^3}\end{aligned}$$

取 $\varphi(r)=\cos\left(\dfrac{\pi r}{4R^2}\right)$,则

$$\int_0^R|\varphi'(r)|^2\mathrm{d}r=\frac{\pi^2}{4R^2}\int_0^R\varphi(r)^2\mathrm{d}r$$

则如果 $\alpha\in\left(\dfrac{3}{10}\lambda,\lambda_1\right)$,可得 $A(\varphi)<0$.取 ε 充分小,由式(14)(15)可得

$$c<\sup_{t>0}\psi(tu_\varepsilon)\leqslant\sup_{t>0}\widetilde{\psi}(tu_\varepsilon)=\widetilde{\psi}(t_\varepsilon u_\varepsilon)<\frac{2}{5}\sqrt{\frac{S^3}{q}}$$

与式(12)相矛盾.所以 $u\neq0$.

从上面的讨论知道,当 $n\to\infty$, $u_n\xrightarrow{\text{弱收敛}}u$ 且 $u\in H_0^1(B_R)\setminus\{0\}$.现在证明 u 是系统(1)的解.因为当

$n\to\infty$,$u_n \xrightarrow{弱收敛} u\in H_0^1(B_R)$.根据(f1)和(f2)可得

$$\int_0^R f(u_n)\varphi \mathrm{d}x \to \int_0^R f(u)\varphi \mathrm{d}x$$

由文献[5]知 $\psi(u_n)\xrightarrow{弱收敛}\psi(u)$.任取 $\varphi\in H_0^1(B_R)$,由

$$[I'(u_n),\varphi] = \int_0^R(\nabla u_n,\nabla\varphi)\mathrm{d}x - \int_0^R f(u_n)\varphi \mathrm{d}x - q\int_0^R \Psi(u_n)\,|u_n|^3 u_n\varphi \mathrm{d}x \to$$

$$\int_0^R(\nabla u_n,\nabla\varphi)\mathrm{d}x - \int_0^R f(u)\varphi \mathrm{d}x - q\int_0^R \Psi(u)\,|u|^3 u\varphi \mathrm{d}x =$$

$$< I'(u),\varphi > = 0$$

故$(u,\Phi(u))$是系统(1)的解,令 $u^{\pm}=\max\{\pm u,0\}$.于是

$$[I'(u),u^-] = -\|\nabla u^-\|_2^2 = 0$$

故$\|u^-\|=0$,于是 $u=u^+\geqslant 0$.由最大值定理可得 u 是系统(1)的正解.

参考文献:

[1] BENCI V, FORTUNATO D.An Eigenvalue Problem for the Schrödinger-Maxwell Equations[J]. Topol Methods Nonlinear Anal, 1998(11):283-293

[2] APRILE T D, MUGNAI D. Existence of Solitary Waves for the Nonlinear Klein-Koedon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell Equations[J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2004(134):893-906

[3] APRILE T D, WEI J C. On Bound States Concentrating on Spheres for the Maxwell-Schrödinger Equations[J]. SIAM J Math Anal, 2005(37):321-342

[4] AZZOLLINI A, D'AVENIA P. On a System Involving a critically Growing Nonlinearity[J]. J Math Anal Appl, 2012(387): 433-438

[5] AZZOLLINI A, D'AVENIA P, LUISI V. Generalized Schrödinger-Poisson Type Systems[J]. Communications on Pure and Appllied Analysis, 2013(12):807-879

[6] AMBROSETTI A, RABINOWITZ P H. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications[J]. J Funct Anal, 1973(14):349-381

[7] BREZIS H, NIRENBERG L. Positive Solution of Nonlinear Elliptic Problems Involving Critical Sobolevexponent[J]. Comm Pure Appl Math, 1983(36):437-477

Solution for a Class of Generalized Schrödigner-Poisson Systems

DING Ling, ZHUANG Chang-Ling

(School of Mathematics and Computer Science, Hubei University of Arts and Science, Xiangyang 441053, China)

Abstract: This paper researches a class of generalized Schrödigner-Poisson Systems with critically growing nonlinearity on ball. The system contains general nonlinear term asymptotically linearity both for the origin and infinite origin. Mountain Pass Lemma in the method of variation is used to prove the existence of positive solution.

Key words: Schrödigner-Poisson Systems; the critically growing nonlinearity; Mountain Pass Lemma