doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0005.011

关于 CE-投射模及其投射维数

谢 国 根
(铜陵学院 数学与计算机学院,安徽 铜陵 244000)

摘　要:利用投射模的研究方法构造出了 CE-内射模的对偶模类 CE-投射模,刻画了 CE-投射模及其 CE-投射维数的一些性质;结论如下:假如 $F:{}_RM\to{}_SM$ 为模范畴的等价函子,G 是 F 的逆函子,则 M 为 R-CE-投射模当且仅当 $F({}_RM)$ 为 S-CE-投射模;RM 在环 R 上的 CE-投射维数与 ${}_SF({}_RM)$ 在环上的 CE-投射维数是相等的,也即 $l.CEpd({}_RM)=l.CEpd({}_SF({}_RM))$.

关键词:CE-投射模;CE-投射维数,模范畴等价

中图分类号:O153.3　**文献标志码**:A　**文章编号**:1672-058X(2015)05-0037-03

1 基础知识

投射模作为模论中最重要的一类模,极大地充实了代数学和同调代数.文献[1-6]对投射模进行了广泛而又深入的研究,此处在其基础上通过构造 CE-投射模对投射模进行了推广.

此处参考文献[1]中的模范畴等价函子,并利用文献[2]中性质 P:设 R 与 S 为等价环,$F:{}_RM\to{}_SM$ 为模范畴等价函子,若模范畴某种性质 P 满足模 M 在 R 环上具有的性质 P 当且仅当 $F(M)$ 在环 S 中也具有性质 P,则称性质 P 为函子 F 的范畴等价性质.例如,性质 P 可以为单模、半单模、有限表现模等. 令 ${}_RX=\{M\in{}_RM\mid M$满足性质 P$\}$.${}_SX=\{M\in{}_SM\mid M$满足性质 P$\}$,利用上述性质 P,进一步构造 CE-投射模和 CE-投射维数,并得到相关的等价结论.

环 R 与环 S 都是有单位元的结合环,且模均为酉模.

定义 1　设 R 为环,对任意的左 R-模 M,若对模 $K\in{}_RX$,均有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,K)=0$,则称左 R-模 M 为左 R-CE-投射模,简称为 CE-投射模.

显然,投射模一定是 CE-投射模.

定理 1　设 R 为环,对任意的左 R-模 M,下列结论等价:

1) 左 R-模 M 为 CE-投射模;

2) 对左 R-模正合列 $0\to K\to A\xrightarrow{\pi}B\to 0$,其中 $K\in{}_RX$,则对任意 R-同态 $f:M\to B$,都存在同态 $g:M\to A$,使得 $f=\pi g$;

3) 对左 R-模正合列 $0\to A\to B\to M\to 0$,对 $K\in{}_RX$,有 $0\to\mathrm{Hom}_R(M,K)\to\mathrm{Hom}_R(B,K)\to\mathrm{Hom}_R(A,K)\to 0$;

4) 假设 $F:{}_RM\to{}_SM$ 为模范畴等价函子,函子 G 为 F 逆函子,则 $F({}_RM)$ 是环 S 上的左 S-CE-投射模.

证明　1)$\Rightarrow$2)　对正合列 $0\to K\to A\xrightarrow{\pi}B\to 0$,其中 $K\in{}_RX$,使用长正合列定理可得

$$0\to\mathrm{Hom}_R(M,K)\to\mathrm{Hom}_R(M,A)\to\mathrm{Hom}_R(M,B)\to\mathrm{Ext}_R^1(M,K)\to\cdots$$

收稿日期:2014-06-23;**修回日期**:2014-10-10.

作者简介:谢国根(1985-),男,江西抚州人,硕士,从事环论及代数表示论研究.

由定理 1 的 1)可得 $\mathrm{Ext}_R^1(M,K)=0$,所以 π 是满同态,即 2)的结论成立.

2)⇒1) 不妨令左 R-模 A 为内射模,对左 R-模正合列 $0\to K\to A\xrightarrow{\pi}B\to 0$(其中 $K\in {}_RX$),使用长正合列定理可得

$$0\to \mathrm{Hom}_R(M,K)\to \mathrm{Hom}_R(M,A)\to \mathrm{Hom}_R(M,B)\to$$
$$\mathrm{Ext}_R^1(M,K)\to \mathrm{Ext}_R^1(M,A)\to\cdots$$

由于左 R-模 A 为内射模,可得 $\mathrm{Ext}_R^1(M,A)=0$,又由条件可知 π 为满同态,所以 $\mathrm{Ext}_R^1(M,K)=0$,由 CE-投射模定义可知 M 为 CE-投射模.

1)⇒3) 对左 R-模正合列 $0\to A\to B\to M\to 0$,根据长正合列定理可得

$$0\to \mathrm{Hom}_R(M,K)\to \mathrm{Hom}_R(B,K)\to \mathrm{Hom}_R(A,K)\to \mathrm{Ext}_R^1(M,K)\to\cdots$$

由 1)知 $\mathrm{Ext}_R^1(M,K)=0$,所以结论 3)成立.

3)⇒1) 不妨令左 R-模 B 为投射模,正合列 $0\to A\to B\to M\to 0$,再次用长正合列定理可得

$$0\to \mathrm{Hom}_R(M,K)\to \mathrm{Hom}_R(B,K)\to \mathrm{Hom}_R(A,K)\to \mathrm{Ext}_R^1(M,K)\to \mathrm{Ext}_R^1(B,K)\to\cdots$$

由于左 R-模 B 为内射模,可知 $\mathrm{Ext}_R^1(B,K)=0$,又由条件知 π 为满同态,所以 $\mathrm{Ext}_R^1(M,K)=0$,故左 R-M 为 CE-投射模.

1)⇒4) 对环 S 上的正合列 $0\to {}_SK\to {}_SA\xrightarrow{\pi}{}_SB\to 0$(其中 ${}_SK\in {}_SX$),由文献[1]可知存在函子 G,并作用于上述正合列可得 R 环上的正合列 $0\to {}_RG({}_SK)\to {}_RG({}_SA)\xrightarrow{G(\pi)}{}_RG({}_SB)\to 0$,由性质 P 可得到 ${}_RG({}_SK)\in {}_RX$,由条件可得 $GF({}_RM)\cong {}_RM$ 是 CE-投射模,由 1)⇒2)的证明可得对任意的 R-同态 $G(f):GF({}_RM)\to {}_RG({}_SB)$(其中 S-同态 $f:F({}_RM)\to {}_SB$),都存在 R-同态 $g:GF({}_RM)\to {}_RG({}_SA)$,使得 $G(f)=G(\pi)g$,再用函子 F 作用可得 $FG(f)=FG(\pi)F(g)$,即 $f=\pi F(g)$,所以由 1)⇔2)的证明可得 $F({}_RM)$为左 S-CE-投射模.

4)⇒1) 由 1)⇒4)证明可得,若 $F({}_RM)$ 为左 S-CE-投射模,则 $GF({}_RM)$ 为 CE-投射模,又由 $GF({}_RM)\cong {}_RM$,即 ${}_RM$ 是 CE-投射模.

定理 2 对任意左 R-模正合列 $0\to M_1\to M\to M_2\to 0$,下列结论成立:

1) 若左 R-模 M_1,M_2 为 CE-射投模,则模 M 也为 CE-投射模;

2) 若模 M 为 CE-投射模且对于任意 $K\in {}_RX$,有 $\mathrm{Ext}_R^2(M_2,K)=0$,则模 M_1 是 CE-投射模.

证明 1)对左 R-模正合列 $0\to M_1\to M\to M_2\to 0$,使用长正合列定理可得

$$\cdots\to \mathrm{Ext}_R^1(M_2,K)\to \mathrm{Ext}_R^1(M,K)\to \mathrm{Ext}_R^1(M_1,K)\xrightarrow{\partial}\mathrm{Ext}_R^2(M_2,K)\to \mathrm{Ext}_R^2(M,K)\to \mathrm{Ext}_R^2(M_1,K)\to\cdots$$

根据模 M_1,M_2 为 CE-投射模可知,$\mathrm{Ext}_R^1(M_1,K)=0$,$\mathrm{Ext}_R^1(M_2,K)=0$,则 $\mathrm{Ext}_R^1(K,M)=0$,故根据 CE-投射模定义可得模 M 是 CE-投射模.

2) 由模 M 是 CE-投射模,所以 $\mathrm{Ext}_R^1(M,K)=0$,又 $\mathrm{Ext}_R^2(M_2,K)=0$,即 $\mathrm{Ext}_R^1(M_1,K)=0$,故左 R-模 M_1为 CE-投射模.

2 投射维数

因为投射模一定是 CE-投射模,由文献[7]可知,投射模一定有投射分解,故 CE-投射模有 CE-投射分解,并且可类似定义 CE-投射模的投射维数.记 CE-投射模 ${}_RM$ 的投射维数为 $l.CEpd({}_RM)$.

定理 3 设 $F:{}_RM\to {}_SM$ 为模范畴的等价函子,且函子 G 是函子 F 的逆函子,则 ${}_RM$ 在 R 环上的 CE-投射维数和 ${}_SF({}_RM)$在 S 环上的 CE-投射维数相等,即 $l.CEpd({}_RM)=l.CEpd({}_SF({}_RM))$.

证明 设 $l.CEpd({}_RM)=n<\infty$(其中 P_i 均为 CE-投射模,$i=1,2,3,\cdots,n$),则对一切的左 R-模 M 有形如正合列

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

的 CE-投射分解,用函子 F 作用上述正合列,可得下列正合列:

$$0 \to F(P_n) \to \cdots \to F(P_1) \to F(P_0) \to F(M) \to 0$$

由定理 1 中 1)⇒4)可得每个 $F(P_i)$都是 S-CE-投射模,故 $l.CEpd(SF(RM)) \leqslant n$.

假设 $l.CEpd({}_RM)=\infty$,显然 $l.CEpd({}_SF({}_RM)) \leqslant l.CEpd({}_RM)$总是成立的,综上,$l.CEpd({}_SF({}_RM)) \leqslant l.CEpd({}_RM)$成立.

反之,如果 $l.CEpd({}_SF({}_RM)) \leqslant n<\infty$,由上述证明可得

$$l.CEpd({}_RGF({}_RM)) \leqslant l.CEpd({}_SF({}_RM))$$

又由于 $GF({}_RM) \cong {}_RM$,即 $l.CEpd({}_RM) \leqslant l.CEpd({}_SF({}_RM))$.

假设 $l.CEpd({}_SF({}_RM))=\infty$,则显然 $l.CEpd({}_RM) \leqslant l.CEpd({}_SF({}_RM))$成立,综上,$l.CEpd({}_RM) \leqslant l.CEpd({}_SF({}_RM))$成立.

所以 $l.CEpd({}_RM)=l.CEpd({}_SF({}_RM))$.证毕.

参考文献:

[1] ANDERSON F W, FULLER K R. Rings and Categories of Modules [M]. Springer-Verlag, Berlin,1974

[2] 谢国根,葛茂荣.关于 *CE*-内射模[J].阜阳师范学院学报,2011,89(3):18-20

[3] 黄影.*FP*-投射模[J].吉林师范大学学报:2007,39(1):46-48

[4] 唐义立,葛茂荣.*FG* 平坦模[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(4):20-23

[5] 朱晓胜.正则环的同调维数[J].南京大学学报:数学半年刊,1994,11(2):226-232

[6] 朱占敏.广义 *FP*-内射模,广义平坦模与某些环[J].数学理论与应用,2002,22(3):40-46

On CE-projective Modules and CE-projective Dimension

XIE Guo-gen

(College of mathematics and computer, Tongling University, Tongling 244000, China)

Abstract: Making use of the research on projective module, this paper constructs CE-projective modules, the dual modules of CE-injective modules, and gives some properties of CE-projective modules and CE- projective dimension. The results are as follow: Suppose an equivalent of modules categories functor $F: {}_RM \to {}_SM$, and G is inverse functor of F, (1) M is CE-projective modules, if and only if $F({}_RM)$ is CE-projective modules; (2) CE-projective dimension of M on ring R and CE-projective dimension $F({}_RM)$ on ring S are equal, $l.\mathrm{CEpd}({}_RM) = l.\mathrm{CEpd}({}_SF({}_RM))$

Key words: CE-projective modules; CE-projective dimension; equivalent of modules categories