doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0005.008

$\mathbf{R}^3$ 上的一类非齐次 Kirchhoff-Poisson 系统的多重解 *

张金玲, 丁　凌

(湖北文理学院 数学与计算机科学学院,湖北 襄阳 441053)

摘　要:运用临界点理论中的 Ekeland 变分原理和山路定理以及一些分析技巧证明了一类非齐次 Kirchhoff-Poisson 系统在 $\mathbf{R}^3$上的多重解是存在的.

关键词:Kirchhoff-Poisson 系统;Ekeland 变分原理;山路定理

中图分类号:O176.3　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)05-0026-05

1　预备和主要结果

考虑如下 $\mathbf{R}^3$上的一类非齐次 Kirchhoff-Poisson 系统:

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u+\phi u=f(x,u)+h(x), x\in\mathbf{R}^3 \\ -\Delta\phi=u^2, x\in\mathbf{R}^3 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $u,\phi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$,$f:\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数,$h\in L^2(\mathbf{R}^3)$,将研究此系统的多重解.目前为止,文献[1]研究了单个的 Kirchhoff 方程的多重解,还没人研究 Kirchhoff-Poisson 系统的多重解.此处将给出系统(1)的多重解的存在性结论.假设如下:

(V1) $V\in C(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$满足 $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}^3}V(x)\geqslant a_1>0$, 这里 $a_1>0$ 是一个常数,而且对任何 $M>0$,$\mathrm{meas}(\{x\in\mathbf{R}^3: V(x)\leqslant M\})<\infty$,这里 meas 是 $\mathbf{R}^3$上的 Lebesgue 测度;

(f1) $f\in C(\mathbf{R}^3\times\mathbf{R},\mathbf{R})$,且对 $2<p<6$,$a_2>0$,$|f(x,z)|\leqslant a_2(1+|z|^{p-1})$,a.e.$x\in\mathbf{R}^3$,$z\in\mathbf{R}$;

(f2) 存在$\mu>4$,使得$\mu F(x,z)=\mu\int_0^z f(x,y)\mathrm{d}y\leqslant zf(x,z)$,$x\in\mathbf{R}^3$,$z\in\mathbf{R}$;

(f3) $f(x,z)/z\to0$,当 $z\to0$,一致地对 $x\in\mathbf{R}^3$成立;

(f4) $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}^3,|z|=1}F(x,z)>0$.

在阐述主要结果之前,给出几个符号的定义.定义函数空间 $H^1(\mathbf{R}^3)$,$D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$是 Sobolev 空间,范数分别定义为

$$\|u\|_{H^1}=\left[\int_{\mathbf{R}^3}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}},\ u\in H^1(\mathbf{R}^3)$$

$$\|u\|_{D^{1,2}}=\left[\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}},\ u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$$

收稿日期:2014-06-18;**修回日期**:2014-07-09.

* **基金项目**:湖北省教育厅科学技术研究计划重点项目(D20142602).

作者简介:张金玲(1974-),女,湖北襄阳人,副教授,硕士,从事模糊系统及非线性分析研究.

另外，记$\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(\mathbf{R}^3)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$的范数.

设 $E=\{u\in H^1(\mathbf{R}^3):\int_{\mathbf{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\,\mathrm{d}x<\infty\}$，则 E 是具有内积和范数

$$(u,v)_E=\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv)\,\mathrm{d}x,\ \|u\|_E=(u,u)_E^{\frac{1}{2}}=\left[\int_{\mathbf{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

的 Hilbert 空间. 显然，嵌入 $E\hookrightarrow L^s(\mathbf{R}^3)$对任何 $s\in[2,6]$是连续的. 主要结果如下：

定理 1　设假设(V1)，(f1)-(f4)成立，$h\in L^2(\mathbf{R}^3)$满足 $h\neq 0$，则存在常数 $m_0>0$，使得当$\|h\|_{L^2}<m_0$ 时，问题(1)至少有两个不同的解.

2　几个引理

系统(1)具有变分结构，设 $F(x,z)=\int_0^z f(x,y)\,\mathrm{d}y$，定义 $J:E\times D^{1,2}(\mathbf{R}^3)\to\mathbf{R}$ 如下：

$$J(u,\phi)=\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}\phi u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}F(x,u)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x \tag{2}$$

其中 $u\in E,\phi\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，则 $J\in C^1(E\times D^{1,2}(\mathbf{R}^3),\mathbf{R})$. 对任意 $v\in E,\omega\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$有

$$\left\langle\frac{\partial J(u,\phi)}{\partial u},v\right\rangle=\left(a+b\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}V(x)uv\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}\phi uv\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}f(x,u)v\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}h(x)v\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\left\langle\frac{\partial J(u,\phi)}{\partial\phi},\omega\right\rangle=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla\phi\cdot\nabla\omega-u^2\omega)\,\mathrm{d}x$$

对任意 $u\in E$，Lax-Milgram 定理[2]暗示了存在唯一的正解 $\phi_u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，使得$-\Delta\phi_u=u^2$，并且 ϕ_u 具有显式表达式：

$$\phi_u(x)=\int_{\mathbf{R}^3}u^2(y)\,|x-y|^{-1}\mathrm{d}y\geqslant 0 \tag{4}$$

这样把 ϕ_u 代入系统(1)的第一个方程可得

$$-\left(a+b\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u+\phi_u u=f(x,u)+h(x),x\in\mathbf{R}^3 \tag{5}$$

于是系统(1)转化成单个的非齐次 Kirchhoff 方程(5). 考虑泛函 $I:E\to\mathbf{R}$，定义 $I(u)=J(u,\phi_u)$. 由系统(1)的第二个方程，则 $\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla\phi_u|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x$，代入泛函 J 的表达式，得到方程(5)的约化泛函：

$$I(u)=\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}F(x,u)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x \tag{6}$$

由假设知 I 是 C^1 泛函，且对任意 $v\in E$，有

$$\langle I'(u),v\rangle=\left(a+b\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}V(x)uv\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}\phi_u uv\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}f(x,u)v\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}h(x)v\mathrm{d}x \tag{7}$$

成立. 因此，如果 $u\in E$ 是泛函 I 的临界点，则(u,ϕ_u)是系统(1)的解且 ϕ_u 满足$-\Delta\phi_u=u^2$.

在证明主要定理之前,给出一些有用的引理.

引理 1[2] 设假设(V1)成立,则嵌入 $E \hookrightarrow L^s(\mathbf{R}^3)$ 对任何 $s\in[2,6)$ 是紧的.

引理 2 设假设(V1),(f1)和(f3)成立,取 $h\in L^2(\mathbf{R}^3)$,则存在常数 $\rho,\alpha,m_0>0$,使得$I(u)\mid_{\|u\|_E=\rho}\geqslant\alpha$ 对所有满足$\|h\|_{L^2}<m_0$ 的 h 成立.

证明 由假设(f3)和(f1)及等式 $F(x,z)=\int_0^1 f(x,tz)z\mathrm{d}t$ 知

$$F(x,z)=\int_0^1 f(x,tz)z\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\left[2\varepsilon|z|+\left(\frac{a_2}{\delta^{p-1}}+a_2\right)|z|^{p-1}\right]|z|\mathrm{d}t=\varepsilon|z|^2+C_\varepsilon|z|^p$$

对任何 $x\in\mathbf{R}^3$和 $z\in\mathbf{R}$ 成立,这里 $C_\varepsilon=\dfrac{\left(\dfrac{a_2}{\delta^{p-1}}+a_2\right)}{p}$,$p\in(2,6)$.

故由 $b\geqslant0$,$\phi_u\geqslant0$,Hölder 不等式及嵌入 $E\hookrightarrow L^s(\mathbf{R}^3)$ 对任何 $s\in[2,6]$ 是连续的,有

$$I(u)=\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x-$$
$$\int_{\mathbf{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x\geqslant u_E\left[\left(\frac{\min\{a,1\}}{2}-\frac{\varepsilon}{a_1}\right)\|u\|_E-a_3\|u\|_E^{p-1}-\frac{1}{\sqrt{a_1}}h_{L^2}\right]$$

其中 $a_3>0$ 是一个常数,a_1 是位势 V 的下界.取 $\varepsilon=a_1\cdot\dfrac{\min\{a,1\}}{4}$,并且定义函数 $g(t)=\dfrac{\min\{a,1\}}{4}t-a_3t^{p-1}$,$t\geqslant0$.故存在$\rho>0$ 满足$\max\limits_{t\geqslant0}g(t)=g(\rho)>0$.取 $m_0=\dfrac{1}{2}\sqrt{a_1}\,g(\rho)$,则存在常数 $\alpha>0$,使得 $I(u)\mid_{\|u\|_E=\rho}\geqslant\alpha$ 对所有满足$\|h\|_{L^2}<m_0$ 的 h 成立.

引理 3 设假设(V1),(f2)和(f4)成立,则存在函数 $v\in E$,$\|v\|_E>\rho$,使得 $I(v)<0$,这里ρ 由引理 2 给出.

证明 令 $K(t)=t^{-\mu}F(x,tz)-F(x,z)$,$t\geqslant1$,则由假设(f2),$K(t)\geqslant K(1)=0$,当 $t\geqslant1$,即 $F(x,tz)\geqslant t^\mu F(x,z)$,$x\in\mathbf{R}^3$,$t\geqslant1$.这样,当$\mu>4$,且由式(4)及假设(f4),有

$$I(tu)\leqslant\frac{at^2}{2}\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{bt^4}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^3}(|\nabla u|^2)^2\mathrm{d}x+\frac{t^2}{2}\int_{\mathbf{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x+\frac{t^4}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x-\right.$$
$$t^\mu\int_{\mathbf{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x-t\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x\to-\infty$$

当 $t\to+\infty$ 对,$u\in E$,$u\neq0$ 成立.因此,当 $u\neq0$ 时,存在 $t_0>0$ 充分大,使得$\|t_0u\|_E>\rho$ 满足 $I(t_0u)<0$,取 $v=t_0u$,引理 3 得证.

引理 4 设假设(V1),(f1)和(f3)成立,$\{u_n\}\subset E$ 是 I 的一个有界 PS 序列,则$\{u_n\}$在 E 中有一个强收敛子列.

证明 设$\{u_n\}\subset E$ 满足 $I(u_n)\to c$,$n=1,2,\cdots$,$I'(u_n)\to0$,当 $n\to\infty$,在 E^* 中,$\sup\limits_n\|u_n\|_E<+\infty$,则$\{u_n\}$存在弱收敛于 u 的子列,仍记为$\{u_n\}$.根据引理 1,在 $L^s(\mathbf{R}^3)$中,$u_n\to u$,$s\in[2,6)$.由式(7)及 $b\geqslant0$,有

$$\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle\geqslant\min\{a,1\}\|u_n-u\|_E^2-$$
$$b\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)\cdot\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x-$$
$$\int_{\mathbf{R}^3}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}(\phi_{u_n}u_n-\phi_u u)(u_n-u)\mathrm{d}x$$

则

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \min\{a,1\}\|u_n-u\|_E^2 \leqslant & [I'(u_n)-I'(u),u_n-u]+ \\
& b\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x+ \\
& \int_{\mathbf{R}^3}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}(\phi_{u_n}u_n-\phi_u u)(u_n-u)\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{8}
$$

显然,由于 $u_n \rightharpoonup u$,当 $n\to\infty$,且 I 是 C^1 泛函,则

$$\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle \to 0, n\to\infty \tag{9}$$

根据假设(f1)(f3)以及 Hölder 不等式,有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant & \int_{\mathbf{R}^3}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x \leqslant \\
& \int_{\mathbf{R}^3}[(|u_n|+|u|)+a_4(|u_n|^{p-1}+|u|^{p-1})]|u_n-u|\mathrm{d}x \leqslant \\
& (\|u_n\|_{L^2}+\|u\|_{L^2})\|u_n-u\|_{L^2}+a_4(\|u_n\|_{L^p}^{p-1}+\|u\|_{L^p}^{p-1})\|u_n-u\|_{L^p}
\end{aligned}
$$

因为在 $L^s(\mathbf{R}^3)$ 中,$u_n\to u$,当 $n\to\infty$,$s\in[2,6)$,故

$$\int_{\mathbf{R}^3}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x \to 0, n\to\infty \tag{10}$$

因为$\|\phi_{u_n}\|_{D^{1,2}(\mathbf{R}^3)}\leqslant C_2\|u\|_{L^{12/5}}^2$,又因为在 $L^s(\mathbf{R}^3)$ 中,$u_n\to u$,对任何 $s\in[2,6)$ 成立,所以 $\left|\int_{\mathbf{R}^3}\phi_{u_n}u_n(u_n-u)\mathrm{d}x\right|\leqslant C_1C_2\|u_n\|_{L^{12/5}}^2\|u_n\|_{L^3}\|u_n-u\|_{L^2}\to 0$,同理 $\left|\int_{\mathbf{R}^3}\phi_u u(u_n-u)\mathrm{d}x\right|\to 0$.于是

$$\int_{\mathbf{R}^3}(\phi_{u_n}u_n-\phi_u u)(u_n-u)\mathrm{d}x \to 0, n\to\infty \tag{11}$$

定义线性泛函 $g:E\to\mathbf{R}$ 如下:$g(w)=\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u\cdot\nabla w\mathrm{d}x$.由于$|g(w)|\leqslant\|u\|_E\|w\|_E$,故 g 是 E 上的连续泛函.又由于在 E 中,$u_n\rightharpoonup u$,所以 $g(u_n)\to g(u)$.这样,由于$\{u_n\}$在 E 中有界,则当 $n\to\infty$ 时,

$$b\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0 \tag{12}$$

由式(8)-(12)知,$\|u_n-u\|_E\to 0$,当 $n\to\infty$.证毕.

3　定理的证明

定理 1 的证明分两步.

第一步,存在一个函数 $u_0\in E$,使得 $I'(u_0)=0$ 且 $I(u_0)<0$.因为对$(x,z)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}$,令 $h(t)=F(x,t^{-1}z)t^{\mu}$,$t\in[1,+\infty)$.由假设(f2)和(f4),有

$$F(x,z)\geqslant F(x,|z|^{-1}z)|z|^{\mu}\geqslant a_5|z|^{\mu} \tag{13}$$

其中 $a_5=\inf\limits_{x\in\mathbf{R}^3,|z|=1}F(x,z)>0$.由假设(f3)和(f1),对 a.e.$x\in\mathbf{R}^3$及 $0\leqslant|z|\leqslant 1$,有

$$F(x,z)=\int_0^1 f(x,tz)(tz)t^{-1}\mathrm{d}t\geqslant-\frac{1}{2}(M_1+1)|z|^2 \tag{14}$$

取 $a_6=\dfrac{1}{2}(M_1+1)a_5>0$,则由假设(13)和(14)得 $F(x,z)\geqslant a_5|z|^{\mu}-a_6|z|^2$,a.e.$x\in\mathbf{R}^3$,$z\in\mathbf{R}$.由于 $h\in L^2(\mathbf{R}^3)$且 $h\neq 0$,故可以选择一个函数 $\psi\in E$,使得 $\int_{\mathbf{R}^3}h(x)\psi(x)\mathrm{d}x>0$.从而,当 $t>0$ 足够小时,有

$$I(t\psi)\leqslant\frac{at^2}{2}\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x+\frac{bt^4}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{t^2}{2}\int_{\mathbf{R}^3}V(x)\psi^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{t^2}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x-a_5t^{\mu}\|\psi\|_{L^{\mu}}{}^{\mu}+a_6t^2\|\psi\|_{L^2}{}^2-t\int_{\mathbf{R}^3}h(x)\psi\mathrm{d}x<0$$

这样,有 $c_0=\inf\{I(u):u\in\overline{B_\rho}\}<0$,这里 $\rho>0$ 由引理 2 给出,$B_\rho=\{u\in E:\|u\|_E<\rho\}$.

由 Ekeland 变分原理[3],存在一个序列 $\{u_n\}\subset\overline{B_\rho}$,使得 $c_0\leqslant I(u_n)<c_0+\frac{1}{n}$,且对任何 $\omega\in\overline{B_\rho}$,有 $I(\omega)\geqslant I(u_n)-\frac{1}{n}\|\omega-u_n\|_E$,则 $\{u_n\}$ 是 I 的一个有界 PS 序列.故由引理 4 知,存在一个函数 $u_0\in E$,使得 $I'(u_0)=0$ 且 $I(u_0)=c_0<0$.

第二步,存在一个泛函 $\widetilde{u_0}\in E$,使得 $I'(\widetilde{u_0})=0$ 且 $I(\widetilde{u_0})<0$.

由引理 2 和引理 3 及山路引理,存在序列 $\{u_n\}\subset E$,使得 $I(u_n)\to\widetilde{c_0}>0$ 且 $I'(u_n)\to 0$.根据引理 4,只需证明 $\{u_n\}$ 在 E 中有界.由 $\mu>4$ 及假设(f2),有

$$\widetilde{c_0}+1+\|u_n\|_E\geqslant I(u_n)-\frac{1}{\mu}<I'(u_n),u_n>\geqslant\min\{a,1\}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u\|_E^2+$$
$$b\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\mu}\right)\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+\left(\frac{1}{\mu}-1\right)\frac{1}{\sqrt{a_1}}\|h\|_{L^2}\|u_n\|_E\geqslant c_1\|u\|_E^2-c_2\|u\|_E$$

对足够大的 n 成立,这里 $c_1=\min\{a,1\}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)>0$,$c_2=\left(\frac{1}{\mu}-1\right)\frac{1}{\sqrt{a_1}}\|h\|_{L^2}>0$.由于 $\mu>4$ 和 $\|h\|_{L^2}<m_0$,故 $\{u_n\}$ 在 E 中有界.

参考文献:

[1] CHEN S J ,LI L.Multiple Solution for a Class of Non-homogenous Kirchhoff Equation on $\mathbf{R}^N$[J].No-nlinear Analysis:Real Word Applications, 2012 (10):1-10

[2] 丁凌.在混合边界条件下奇异临界指数的椭圆方程的无穷多个解[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27(1):30-35

[3] EKELAND I.On the Variational Principle[J].J Math Appl,1974(47):324-353

Multiple Solutions to a Class of Nonhomogeneous Kirchhoff-Poisson Systems in $\mathbf{R}^3$

ZHANG Jin-ling, DING Ling

(School of Mathematics and Computer Science, Hubei University of Arts and Science, Xiangyang 441053, China)

Abstract: The existence of multiple solutions to a class of non-homogeneous Kirchhoff-Poisson systems in $\mathbf{R}^3$ is verified by using the Ekeland's variational principle , the Mountain Pass Theorem and some analysis techniques.

Key words: Kirchhoff-Poisson systems;Ekeland's variational principle;the Mountain Pass Theorem