doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0005.001

一类新的广义非线性变分不等式系统的预解算子算法*

刘　先,赵星起,张　亮
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:考虑 Hilbert 空间中一类新的广义非线性变分不等式系统(SGNLVI),建立了 SGNLVI 和不动点问题之间的等价性;并利用预解算子方法,对(SGNLVI)问题提出一个新的预解算子算法,在适当的条件下分析了该算法的收敛性;给出的结果是更一般的结果,这些结果改进并推广了相关文献中的结论.

关键词:非线性变分不等式系统;预解算子;松弛强制算子;强单调算子;Lipschitz 连续

中图分类号:O177.91　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)05-0001-06

变分不等式理论是 1964 年 Stampacchia 在文献[1]中提出的,它是非线性分析的重要组成部分.变分不等式理论与力学、微分方程、控制理论、数学经济、最优化理论、对策理论、非线性规划等理论和应用学科有着广泛的联系,它提供了一种简单、自然、统一的框架研究和学习一大类在纯科学和应用科学中出现的问题.众所周知,变分不等式问题和不动点问题之间是等价的,这种等价性已经被用来提出一系列求解变分不等式问题的迭代方法.例如,投影方法及其变形形式、Wiener-Hopf 方程、辅助原理方法、解的更新方法等,见文献[1-15].为此考虑 Hilbert 空间中一类新的广义非线性变分不等式系统(SGNLVI),建立了(SGNLVI)和不动点问题之间的等价性;进而利用预解算子方法对(SGNLVI)问题提出一个新的预解算子算法,在适当的条件下分析了算法的收敛性.此处给出的结果是更一般的结果,这些结果改进并推广了相关文献中的结论.

1　预备知识

设 H 是实 Hilbert 空间,它的内积和范数分别记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$,设 K 是 H 中的一个非空闭凸集,任意给定非线性算子 $\varphi: K\times K\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, $T_i: K\times K\to K$ 和 $g_i: H\to K$, $i=1,2$,考虑下面的变分不等式系统(SGNLVI):

求 $(x^*,y^*)\in K\times K$,使得

$$\begin{cases}\langle \rho_1 T_1(y^*,x^*)+x^*-g_1(y^*),g_1(x)-x^*\rangle+\varphi(g_1(x))-\varphi(x^*)\geqslant 0,\ \forall x\in H: g_1(x)\in K\\ \langle \rho_2 T_2(x^*,y^*)+y^*-g_2(x^*),g_2(x)-y^*\rangle+\varphi(g_2(x))-\varphi(y^*)\geqslant 0,\ \forall x\in H: g_2(x)\in K\end{cases}$$

其中,$\rho_1>0$,$\rho_2>0$ 为常数.

注 1　1) 如果 $T_1=T_2=T$ 是单变量的算子,并且 $\varphi=0$,则(SGNLVI)简化为文献[1]中研究的变分不等式问题;

2) 如果 $\varphi=0$ 是零算子,则(SGNLVI)简化为 Noor et al.在文献[2]研究的变分不等式问题;

收稿日期:2014-09-12;**修回日期**:2014-10-08.

* **基金项目**:国家自然科学基金项目(01JA880034);重庆市自然科学基金项目(cstc2011jjA00010).

作者简介:刘先(1989-),男,四川宜宾人,硕士研究生,从事最优化理论研究.

3) 如果 $T_1=T_2=T$ 是单变量的算子,并且 $g_1=g_2=g,\varphi=0$,则(SGNLVI)简化为 Noor 在文献[3]中研究的变分不等式问题;

4) 如果 $T_1=T_2=T,\varphi=0$,那么(SGNLVI)简化为 Noor 在文献[4-5]中研究的 Hartman-Stampacchia 变分不等式问题.

对单变量的算子 $T:H\to H$,T 的定义域、值域以及图像分别记作

$$D(T)=\{u\in H:T(u)\neq\varnothing\}$$

$$R(T)=\bigcup_{u\in H}T(u)$$

$$\mathrm{Graph}(T)=\{(u,u^*)\in H\times H:u\in D(T),u^*\in T(u)\}$$

定义 1 算子 $T:H\to H$ 被称为

1) 单调的,当且仅当对任意 $u\in D(T),v\in D(T)$ 和 $u^*\in T(u),v^*\in T(v)$,有

$$\langle v^*-u^*,v-u\rangle\geqslant 0 \tag{1}$$

2) 严格单调的,当且仅当对任意 $u\in D(T),v\in D(T),u\neq v$ 和 $u^*\in T(u),v^*\in T(v)$,有

$$\langle v^*-u^*,v-u\rangle>0 \tag{2}$$

3) 极大单调的,当且仅当 T 是单调的并且 T 的图像不真包含于任意单调算子的图像.

T^{-1}是可逆算子,定义为 $v\in T^{-1}(u)\Leftrightarrow T(v)$.

定义 2[11] 设 T 为极大单调算子,对任意 $\sigma>0$,和 T 相关联的预解算子定义为

$$J_T(u)=(I+\sigma T)^{-1}(u),\forall u\in H \tag{3}$$

注 2 严格或极大单调算子一定是单调的,反之不成立.众所周知,单调算子是极大单调的当且仅当它的预解算子处处有定义.进一步,预解算子是单值非扩张的映像,即

$$\|J_T(x)-J_T(y)\|\leqslant\|x-y\|,\forall x,y\in H$$

特别地,知道 φ 的次微分$\partial\varphi$ 是一个极大单调算子,见文献[10].

定义 3 算子 $g:H\to H$ 被称为

1) ξ-强单调的,当且仅当对任意 $x,x'\in H$,存在常数 $\xi>0$,使得

$$\langle g(x)-g(x'),x-x'\rangle\geqslant\xi\|x-x'\|^2 \tag{4}$$

2) η-Lipschitz 连续的,当且仅当对任意 $x,x'\in H$,存在常数 $\eta>0$,使得

$$\|g(x)-g(x')\|\leqslant\eta\|x-x'\| \tag{5}$$

定义 4 算子 $T:H\times H\to H$ 被称为

1) 关于第一个变量(ω_1,t_1)-松弛强制的,当且仅当对任意 $x,x'\in H$,存在常数 $t_1>0$ 和 $\omega_1>0$,使得

$$\langle T(x,\cdot)-T(x',\cdot),x-x'\rangle\geqslant-\omega_1\|T(x,\cdot)-T(x',\cdot)\|^2+t_1\|x-x'\|^2 \tag{6}$$

2) 关于第二个变量(ω_2,t_2)-松弛强制的,当且仅当对任意 $y,y'\in H$,存在常数 $t_2>0$ 和 $\omega_2>0$,使得

$$\langle T(\cdot,y)-T(y',\cdot),y-y'\rangle\geqslant-\omega_2\|T(\cdot,y)-T(\cdot,x')\|^2+t_2\|y-y'\|^2 \tag{7}$$

3) 关于第一个变量 μ-Lipschitz 连续的,当且仅当对任意 $x,x'\in H$,存在常数 $\mu>0$,使得

$$\|T(x,\cdot)-T(x',\cdot)\|\leqslant\mu\|x-x'\| \tag{8}$$

4) 关于第二个变量 γ-Lipschitz 连续的,当且仅当对任意 $y,y'\in H$,存在常数 $\gamma>0$,使得

$$\|T(\cdot,y)-T(\cdot,y')\|\leqslant\gamma\|x-x'\| \tag{9}$$

注 3 由定义可知,单位算子 I 是 1-强单调和 1-Lipschitz 连续的映像.如果算子 $g:H\to H$ 是 ξ-强单调和 η-Lipschitz 连续的,那么 $\eta\geqslant\xi$.如果 $T:H\times H\to H$ 关于第一个或第二个变量是强单调的,那么 T 关于第一个或第二个变量是松弛强制的,即松弛强制映像是比强单调映像更为广泛的一类映像.

引理 1[11] 对于给定的 $z\in H,u\in K$ 满足不等式(10):

$$\langle u-z,v-u\rangle+\sigma\varphi(v)-\sigma\varphi(u)\geqslant 0,\forall v\in K \tag{10}$$

当且仅当 $u=J_\varphi(z)$,其中 $J_\varphi=(I+\sigma\partial\varphi)^{-1}$是预解算子,$\sigma>0$ 为常数.

引理 2[10]　设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个非负实序列,且满足下面的条件:

$$a_{n+1}\leqslant(1-d_n)a_n+b_n,\ \forall n\geqslant n_0 \tag{11}$$

其中 n_0 是某个非负整数,$d_n\in(0,1)$且 $\sum_{n=0}^{\infty}d_n=\infty$,$b_n=o(d_n)$,那么当 $n\to\infty$ 时,有 $a_n\to 0$ 成立.

2　主要结果

定理 1 建立了(SGNLVI)和不动点问题之间的等价性.

定理 1　$x^*,y^*\in K$ 是(SGNLVI)的解,当且仅当

$$\begin{cases}x^*=J_\varphi[g_1(y^*)-\rho_1T_1(y^*,x^*)]\\ y^*=J_\varphi[g_2(x^*)-\rho_2T_2(x^*,y^*)]\end{cases} \tag{12}$$

其中 $J_\varphi=(I+\sigma\partial\varphi)^{-1}$是预解算子,$\rho_1,\rho_2>0$ 为正常数.

证明　设 $x^*,y^*\in K$ 是(SGNLVI)的解,那么对所有 $x\in H$,有

$$\begin{cases}\langle\rho_1T_1(y^*,x^*)+x^*-g_1(y^*),g_1(x)-x^*\rangle+\varphi(g_1(x))-\varphi(x^*)\geqslant 0\\ \langle\rho_2T_2(x^*,y^*)+y^*-g_2(x^*),g_2(x)-y^*\rangle+\varphi(g_2(x))-\varphi(y^*)\geqslant 0\end{cases} \tag{13}$$

式(13)可以等价变形为

$$\begin{cases}\langle x^*-(g_1(y^*)-\rho_1T_1(y^*,x^*)),g_1(x)-x^*\rangle+\varphi(g_1(x))-\varphi(x^*)\geqslant 0\\ \langle y^*-(g_2(x^*)-\rho_2T_2(x^*,y^*)),g_2(x)-y^*\rangle+\varphi(g_2(x))-\varphi(y^*)\geqslant 0\end{cases}$$

利用引理 1,对 $\sigma=1$ 的情形,有

$$\begin{cases}x^*=J_\varphi[g_1(y^*)-\rho_1T_1(y^*,x^*)]\\ y^*=J_\varphi[g_2(x^*)-\rho_2T_2(x^*,y^*)]\end{cases}$$

即式(12)成立.证毕.

算法 1　对任意给定的初始点 $x_0,y_0\in H$,序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$按照下面的迭代方式产生:

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nJ_\varphi[g_1(y_n)-\rho_1T_1(y_n,x_n)]\\ y_{n+1}=(1-\beta_n)y_n+\beta_nJ_\varphi[g_2(x_n)-\rho_2T_2(x_n,y_n)]\end{cases} \tag{14}$$

其中 $J_\varphi=(I+\partial\varphi)^{-1}$是预解算子,$\{\alpha_n\}\subset[0,1]$,$\{\beta_n\}\subset[0,1]$,$\rho_1,\rho_2$ 为正常数.

下面的定理 2 证明了算法 1 的收敛性.在这之前,先建立重要的引理 3.

引理 3　设 H 是实 Hilbert 空间,$\{x_n\}\{y_n\}\subset H$,且满足

$$\|x_{n+1}-x^*\|+\|y_{n+1}-y^*\|\leqslant\max\{(1-r_n)(1-s_n)\}(\|x_n-x^*\|+\|y_n-y^*\|) \tag{15}$$

其中 $x^*,y^*\in H$,$\{r_n\}\{s_n\}\subset(0,1)$,且满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}r_n=\infty$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}s_n=\infty$.那么$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别收敛到 x^* 和 y^*.

证明　首先,定义 $H\times H$ 上的范数$\|\cdot\|_1$ 如下:

$$\|(x,y)\|_1=\|x\|+\|y\|,\ \forall(x,y)\in H\times H$$

则$(H\times H,\|\cdot\|_1)$是 Banach 空间.因此,由$\|\cdot\|_1$ 的定义知,式(15)蕴含着

$$\|(x_{n+1},y_{n+1})-(x^*,y^*)\|_1\leqslant\max\{(1-r_n)(1-s_n)\}\|(x_n,y_n)-(x^*,y^*)\|_1$$

利用引理 2,有

$$\lim_{n\to\infty}\|(x_n,y_n)-(x^*,y^*)\|_1=\lim_{n\to\infty}(\|x_n-x^*\|+\|y_n-y^*\|)=0$$

因此,序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别收敛到 x^* 和 y^*.证毕.

定理 2　设 K 是实 Hilbert 空间 H 中的一个非空闭凸子集.假定映像 $T_i:K\times K\to K$ 和映像 $g_i:H\to K$ 满足 T_i

关于第一个分量是(ω_i,t_i)-松弛强制的,关于第一个分量是μ_i-Lipschitz 连续的,关于第二个分量是γ_i-Lipschitz 连续的;g_i 是η_i-Lipschitz 连续的,ξ_i-强单调的,$i=1,2$.如果存在正常数$\rho_1,\rho_2>0$,使得

$$\left|\rho_1-\frac{t_1-\omega_1\mu_1^2}{\mu_1^2}\right|<\frac{\sqrt{(t_1-\omega_1\mu_1^2)^2-\mu_1^2(k_1-\rho_2\gamma_2)(2-k_1-\rho_2\gamma_2)}}{\mu_1^2}$$

$$|t_1-\omega_1\mu_1^2|>\mu_1\sqrt{(k_1-\rho_2\gamma_2)(2-k_1-\rho_2\gamma_2)},\rho_2\gamma_2<k_1<2-\rho_2\gamma_2$$

$$\left|\rho_2-\frac{t_2-\omega_2\mu_2^2}{\mu_2^2}\right|<\frac{\sqrt{(t_2-\omega_2\mu_2^2)^2-\mu_2^2(k_2-\rho_1\gamma_1)(2-k_2-\rho_1\gamma_1)}}{\mu_2^2}$$

$$|t_2-\omega_2\mu_2^2|>\mu_2\sqrt{(k_2-\rho_1\gamma_1)(2-k_2-\rho_1\gamma_1)},\rho_1\gamma_1<k_2<2-\rho_1\gamma_1$$

假定$x^*,y^*\in K$是系统(SGNVIP)的解.进一步,假定$\{\alpha_n\}\{\beta_n\}\subset[0,1]$,并且满足下面的条件:

(i) $0<\Omega_{1n}=\alpha_n(1-\rho_1\gamma_1)-\beta_n(k_2+\theta_2)<1$;

(ii) $0<\Omega_{2n}=\beta_n(1-\rho_2\gamma_2)-\alpha_n(k_1+\theta_1)<1$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_{1n}=\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_{2n}=\infty$.

其中,

$$k_i=\sqrt{1-2\xi_i+\eta_i^2},i=1,2 \tag{16}$$

$$\theta_i=\sqrt{1+2\rho_i\omega_i\mu_i^2-2\rho_it_i+\rho_i^2\mu_i^2},i=1,2 \tag{17}$$

那么由算法 1 产生的迭代序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别收敛于x^*和y^*.

证明 由$x^*,y^*\in K$是非线性变分不等式系统(SGNVIP)的解及定理 1,有

$$\begin{cases}x^*=J_\varphi[g_1(y^*)-\rho_1T_1(y^*,x^*)]\\ y^*=J_\varphi[g_2(x^*)-\rho_2T_2(x^*,y^*)]\end{cases} \tag{18}$$

为了证明定理 2 的结论成立,首先计算$\|x_{n+1}-x^*\|$.利用式(14)和式(18),可得

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-x^*\|=\\&\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nJ_\varphi[g_1(y_n)-\rho_1T_1(y_n,x_n)]-x^*\|\leqslant\\&(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|+\alpha_n\|J_\varphi[g_1(y_n)-\rho_1T_1(y_n,x_n)]-J_\varphi[g_1(y^*)-\rho_1T_1(y^*,x^*)]\|\leqslant\\&(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|+\alpha_n\|g_1(y_n)-g_1(y^*)-\rho_1(T_1(y_n,x_n)-T_1(y^*,x^*))\|\leqslant\\&(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|+\alpha_n\|g_1(y_n)-g_1(y^*)-(y_n-y^*)\|+\\&\alpha_n\|y_n-y^*-\rho_1(T_1(y_n,x_n)-T_1(y^*,x_n))\|+\alpha_n\rho_1\|T_1(y^*,x_n)-T_1(y^*,x^*)\|\end{aligned} \tag{19}$$

因为g_1是η_1-Lipschitz 连续的,ξ_1-强单调的,有

$$\begin{aligned}&\|g_1(y_n)-g_1(y^*)-(y_n-y^*)\|^2=\\&\|g_1(y_n)-g_1(y^*)\|^2-2[g_1(y_n)-g_1(y^*),y_n-y^*]+\|y_n-y^*\|^2\leqslant\\&\eta_1^2\|y_n-y^*\|^2-2\xi_1\|y_n-y^*\|^2+\|y_n-y^*\|^2=\\&(1-2\xi_1+\eta_1^2)\|y_n-y^*\|^2\end{aligned} \tag{20}$$

因为T_1关于第一个分量是(ω_1,t_1)-松弛强制的,μ_1-Lipschitz 连续的,有

$$\begin{aligned}&\|y_n-y^*-\rho_1(T_1(y_n,x_n)-T_1(y^*,x_n))\|^2=\\&\|y_n-y^*\|^2-2\rho_1[T_1(y_n,x_n)-T_1(y^*,x_n),y_n-y^*]+\rho_1^2\|T_1(y_n,x_n)-T_1(y^*,x_n)\|^2\leqslant\\&\|y_n-y^*\|^2+2\rho_1\omega_1\|T_1(y_n,x_n)-T_1(y^*,x_n)\|^2-2\rho_1t_1\|y_n-y^*\|^2+\rho_1^2\|T_1(y_n,x_n)-T_1(y^*,x_n)\|^2\leqslant\\&\|y_n-y^*\|^2+2\rho_1\omega_1\mu_1^2\|y_n-y^*\|^2-2\rho_1t_1\|y_n-y^*\|^2+\rho_1^2\mu_1^2\|y_n-y^*\|^2=\end{aligned}$$

$$(1+2\rho_1\omega_1\mu_1^2-2\rho_1 t_1+\rho_1^2\mu_1^2)\|y_n-y^*\|^2 \tag{21}$$

由 T_1 关于第二个分量是 γ_1-Lipschitz 连续的,可得

$$\|T_1(y^*,x_n)-T_1(y^*,x^*)\|\leqslant \gamma_1\|x_n-x^*\| \tag{22}$$

将式(20)(21)和式(22)带入式(19),得

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant (1-\alpha_n+\alpha_n\rho_1\gamma_1)\|x_n-x^*\|+\alpha_n(k_1+\theta_1)\|y_n-y^*\| \tag{23}$$

其中 $k_1=\sqrt{1-2\xi_1+\eta_1^2}$,$\theta_1=\sqrt{1+2\rho_1\omega_1\mu_1^2-2\rho_1 t_1+\rho_1^2\mu_1^2}$.

类似地,可以证明

$$\|y_{n+1}-y^*\|\leqslant (1-\beta_n+\beta_n\rho_2\gamma_2)\|y_n-y^*\|+\beta_n(k_2+\theta_2)\|x_n-x^*\| \tag{24}$$

其中 $k_2=\sqrt{1-2\xi_2+\eta_2^2}$,$\theta_2=\sqrt{1+2\rho_2\omega_2\mu_2^2-2\rho_2 t_2+\rho_2^2\mu_2^2}$.

由式(23)(24),可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|+\|y_{n+1}-y^*\|\leqslant{}& (1-\alpha_n+\alpha_n\rho_1\gamma_1)\|x_n-x^*\|+\alpha_n(k_1+\theta_1)\|y_n-y^*\|+\\ &\beta_n(k_2+\theta_2)\|x_n-x^*\|+(1-\beta_n+\beta_n\rho_2\gamma_2)\|y_n-y^*\|=\\ &[1-(\alpha_n(1-\rho_1\gamma_1)-\beta_n(k_2+\theta_2))\|x_n-x^*\|+\\ &[1-(\beta_n(1-\rho_2\gamma_2)-\alpha_n(k_1+\theta_1))\|y_n-y^*\|\leqslant\\ &\max\{(1-\Omega_{1n},(1-\Omega_{2n})\}(\|x_n-x^*\|+\|y_n-y^*\|)\end{aligned}$$

其中 $\Omega_{1n}=\alpha_n(1-\rho_1\gamma_1)-\beta_n(k_2+\theta_2)$,$\Omega_{2n}=\beta_n(1-\rho_2\gamma_2)-\alpha_n(k_1+\theta_1)$.由假设及引理 1,知道$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别收敛于 x^* 和 y^*.证毕.

3　小　结

考虑了一类新的广义非线性变分不等式系统(SGNLVI)解的迭代算法.建立了(SGNLVI)和不动点问题之间的等价性,并利用预解算子方法提出一些新的预解算子算法,在适当的条件下分析了该算法的收敛性.给出的结果是更一般的结果,这些结果改进并推广了相关文献中的结论.今后,将考虑能否证明(SGNLVI)解的存在性,并给出一些相应解的迭代算法.另一方面,也将会考虑把求解(SGNLVI)的各种迭代算法进行对比,寻找各种算法的优缺点,从而设计出求解(SGNLVI)的更为高效的算法.

参考文献:

[1] STAMPACCHIA G.Formes Bilinéaires Coercitives Surles Ensembles convexes[J].CR Acad Sci Paris,1964,258(1):4413-4416

[2] ASLAM NOOR M,INAYAT NOOR K.Projection Algorithms for Solving a System of General Variational Inequalities[J].Nonlinear Analysis:Theory,Methods.Applications,2009,70(7):2700-2706

[3] NOOR M A.Differentiable Non-convex Functions and General Variational Inequalities[J].Applied Mathematics and Computation,2008(2):623-630

[4] NOOR M A,NOOR K I.On Sensitivity Analysis of General Variational Inequalities[J].Mathematical Communications,2008,13(1):75-83

[5] NOOR M A.Quasi Variational Inequalities[J].Applied Mathematics Letters,1988,1(4):367-370

[6] NOOR M A.General Variational Inequalities[J].Applied Mathematics Letters,1988,1(2):119-122

[7] HUANG Z,ASLAM NOOR M.An Explicit Projection Method for a System of Nonlinear Variational Inequalities with Different (γ,r)-cocoercive Mappings[J].Applied Mathematics and Computation,2007(1):356-361

[8] CHANG S S,JOSEPH LEE H W,CHAN C K.Generalized System for Relaxed Cocoercive Variational Inequalities in Hilbert Spaces[J].Applied Mathematics Letters,2007,20(3):329-334

(下转第 59 页)