doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0003.003

基于双论域的一般多粒度模糊粗糙集

孙 文 鑫

(重庆水利电力职业技术学院 基础部,重庆 永川 402160)

摘 要:首先定义了各论域上的支撑函数;其次通过支撑函数分别给出了不同论域一般多粒度模糊下上近似算子的定义,建立了双论域的一般多粒度模糊粗糙集模型;此外,还讨论了各近似算子的性质.

关键词:粗糙集 ; 多粒度; 双论域

中图分类号:O380 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-058X(2015)03-0012-04

由 Z.Pawlak 在 1982 年提出的粗糙集理论[1]是一种处理不确定性的数学工具[2].如今,它已成功的应用到了各个领域,如模式识别[3]、数据挖掘[4]等.而由 Zadeh 提出的模糊集理论也是一种处理不确定性问题的数学工具,然而这两种数学理论处理的不确定性问题是完全不同的,因此一些研究者便将 Pawlak 粗糙集理论和模糊集理论结合起来提出了模糊粗糙集模型和粗糙模糊集模型[5,6].

粗糙集研究的另一方面还集中在粒计算上. Zadeh 在 1979 年首先提出了粒计算的概念并讨论了模糊信息粒度[7]. Hobbs 在 1985 年提出了粒的概念[8].从粒计算的观点来看,经典的 Pawlak 粗糙集模型可以视为是基于一个粒度(等价关系)的粗糙集模型,当由多个粒度来划分论域时,便会出现如下情况:

情形 1:至少存在一个粒度使得该元素一定属于刻画的概念;

情形 2:至少存在一个粒度使得该元素可能属于刻画的概念;

情形 3:存在某些粒度使得该元素一定属于刻画的概念;

情形 4:存在某些粒度使得该元素可能属于刻画的概念;

情形 5:所有的粒度都使得该元素一定属于刻画的概念;

情形 6:所有的粒度都使得该元素可能属于刻画的概念;

从上述情形出发,一些研究者已经将粗糙集模型推广到了多粒度粗糙集模型. 为了将多粒度粗糙集模型更好的应用到实际问题中,文献[9]提出了基于等价关系的多粒度粗糙集模型.

1 基于双论域的模糊粗糙集

下面将介绍一些必备的理论知识[10]。

定义 1 设 u 和 V 是两个非空论域,若 R 是 $u\times V$ 上的子集,则称 R 是从论域 u 到论域 V 上的一个二元关系.

定义 2 称三元组(u,V,R)为一般的近似空间,其中 u 和 V 是两个非空的有限集称为论域,R 是 $u\times V$ 上的任意一个二元关系.

定义 3 设(u,V,R)是一般的近似空间,分别定义两个算子 $R_s:U\mapsto P(V)$ $R_p:V\mapsto P(U)$

收稿日期:2014-09-01;**修回日期:**2014-10-12.

作者简介:孙文鑫(1988-),女,河南焦作人,硕士研究生,从事粗糙集和模糊集的研究.

$$R_s(x)=\{y\in V\mid xRy,x\in U\};R_p(y)=\{x\in U\mid xRy,y\in V\}$$

称 $R_s(x)$ 为 x 对于关系 R 的后继领域,$R_p(y)$ 为 y 对于关系 R 的前继领域.

定义 4　设 (U,V,R) 是一个一般的近似空间,对于任意的模糊集 $A\in F(U)$,$B\in F(V)$,分别定义论域 U,V 上的两个近似算子如下:

$$\underline{R}_U(A)(y)=\min\{A(x)\mid x\in R_p(y)\},\ \overline{R}_U(A)(y)=\max\{A(x)\mid x\in R_p(y)\},y\in V$$

$$\underline{R}_V(B)(x)=\min\{B(y)\mid y\in R_s(x)\},\ \overline{R}_V(B)(x)=\max\{B(y)\mid y\in R_s(x)\},x\in U$$

则分别称 $\underline{R}_U(A)$ 和 $\overline{R}_U(A)$ 为论域 U 上模糊集 A 的下近似和上近似,而 $\underline{R}_V(B)$ 和 $\overline{R}_V(B)$ 分别称为论域 V 上模糊集 B 的下近似和上近似.

2　基于双论域的一般多粒度模糊粗糙集

介绍双论域上的一般多粒度模糊粗糙集.

定义 5　设 U,V 是两个不同的非空论域,是上的个不同的二元关系,对于 $x\in U,y\in V$,分别定义

$$S_{R_i}(y)=\begin{cases}1 & x\in R_i^p(y)\\0 & \text{否则}\end{cases},\ S_{R_i}(x)=\begin{cases}1 & y\in R_i^s(x)\\0 & \text{否则}\end{cases}$$

分别称 $S_{R_i}(y)$ 为 y 在关系 R_i 的支撑函数,$S_{R_i}(x)$ 为 x 在关系 R_i 的支撑函数.

定义 6　设 U,V 是两个不同的非空论域,是上的个不同的二元关系,对于任意的 $\beta\in(0.5,1]$,$A\in F(U)$,定义

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)(y)=\{\wedge A(x)\mid \frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(y)}{m}>\beta\};\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)(y)=\{\vee A(x)\mid \frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(y)}{m}>\beta\}$$

称 $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)$ 和 $\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)$ 分别为论域上模糊集的一般多粒度粗糙模糊下近似和上近似. 如果 $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)=\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)$,则称 A 是论域 u 上的一般多粒度模糊可定义的,否则称 A 是论域 u 上的一般多粒度模糊粗糙的.

根据论域 u 上一般多粒度模糊粗糙集下上近似算子的定义可得到以下性质.

性质 1　设 u,V 是两个不同的非空论域,$R_i(i=1,\cdots,m)$ 是 $u\times V$ 上的 m 个不同二元关系,对于任意的 $\beta\in(0.5,1]$,$A,A_*\in F(u)$,则有以下性质成立。

(1) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(\sim A)=\sim\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)$,$\sim\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)=\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(\sim A)$;

(2) $A\subseteq A_*\Rightarrow\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)$,$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)$;

(3) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A\cap A_*)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)\cap\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)$;

(4) $\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A\cap A_*)\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)\cap\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)$;

(5) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A\cup A_*)\supseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)\cup\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)$;

(6) $\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A\cup A_*)\supseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)\cup\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)$.

证明:(1) 对于任意的,有

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(\sim A)(y)=\{\wedge(1-A(x))\mid\frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(y)}{m}>\beta\}=1-\{\vee A(x)\mid\frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(y)}{m}>\beta\}=\sim\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)(y)$$

类似的可证性质$\sim\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)=\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(\sim A)$成立.

(2) 如果$A\subseteq A_*$,则对于任意的$y\in V$,有$A(y)\leqslant A_*(y)$. 故

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)(y)=\left\{\wedge A(x)\mid \frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(y)}{m}>\beta\right\}\leqslant\left\{\wedge A_*(x)\mid \frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(y)}{m}>\beta\right\}=\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)(y)$$

同理可证得性质$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)$成立.

(3) 对于任意的$y\in V$,有

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A\cap A_*)(y)=\left\{\wedge\,(A(x)\ \wedge A_*(x))\mid \frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(y)}{m}>\beta\right\}\leqslant\left\{\wedge A(x)\mid \frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(y)}{m}>\beta\right\}=\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)(y)$$

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A\cap A_*)(y)=\left\{\wedge\,(A(x)\ \wedge A_*(x))\mid \frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(y)}{m}>\beta\right\}\leqslant\left\{\wedge A_*(x)\mid \frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(y)}{m}>\beta\right\}\ \underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)(y)$$

因此$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A\cap A_*)(y)\leqslant\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)(y)\wedge\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)(y)$,故有性质$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A\cap A_*)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)\cap\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)$成立.

(4) 对于任意的$y\in V$,有$(A\cap A_*)(y)\leqslant A(y)$且$(A\cap A_*)(y)\leqslant A_*(y)$。根据性质(2),故性质$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A\cap A_*)\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A)\cap\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(A_*)$成立.

同理可证得性质(5)和(6)成立.

定义 7 设U,V是两个不同的非空论域,$R_i(i=1,\cdots,m)$是$u\times V$上的m个不同的二元关系,对于任意的$\beta\in(0.5,1]$,$B\in F(V)$,定义

$$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)(x)=\left\{\wedge B(y)\mid \frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(x)}{m}>\beta\right\};\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)(x)=\left\{\vee B(y)\mid \frac{\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}(x)}{m}>\beta\right\}.$$

称$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)$和$\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)$分别为论域$V$上模糊集$B$的一般多粒度粗糙模糊下近似和上近似. 如果$\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)=\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)$,则称$B$是论域$V$上的一般多粒度模糊可定义的,否则称$B$是论域$V$上的一般多粒度模糊粗糙的.

性质 2 设u,V是两个不同的非空论域,$R_i(i=1,\cdots,m)$是$u\times V$的m个不同的二元关系,对于任意的$\beta\in(0.5,1]$,$B,B_*\in F(V)$,则有以下性质成立.

(1) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(\sim B)=\sim\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)$, $\sim\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)=\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(\sim B)$;

(2) $B\subseteq B_*\Rightarrow\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B_*)$, $\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B_*)$;

(3) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B\cap B_*)\subseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)\cap\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B_*)$;

(4) $\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B\cap B_*)\subseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)\cap\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B_*)$;

(5) $\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B\cup B_*)\supseteq\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)\cup\underline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B_*)$;

(6) $\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B\cup B_*)\supseteq\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B)\cup\overline{GM}^{\beta}_{\sum_{i=1}^{m}R_i}(B_*)$.

证明:证明过程类似于性质 1 的证明过程.

3 结　论

将双论域上的模糊粗糙集和粒计算理论结合起来建立了双论域上的一般多粒度模糊粗糙集模型. 为了更好的建立模型,定义了各论域上的支撑函数,并讨论研究了各论域上近似算子的性质.研究为双论域上多粒度的研究奠定了理论基础.

参考文献:

[1] PAWLAK Z. International Journal of Computer and Information Sciences[J].Rough Sets 1982(11):341-356

[2] 代春艳.粗糙集理论及其应用发展综述[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2004,21(6):575-579

[3] ANAN V S, NARASU M M, SUBR D K. Tree Structure for Efficient Data Mining Using Rough Sets[J]. Pattern Recognition Letter,2003(24):851-862

[4] CHAN C C, A Rough Set Approach to Attribute Generalization in Data Mining[J].Information Sciences,1998(107):169-176

[5] DUBIOS D, PRADE H, Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets[J]. International Journal of General Systems, 1990(17): 191-209

[6] CHEN D G, ZHAO S Y. LocalReduction of Decision System with Fuzzy Rough Sets[J].Fuzzy Sets and Systems,2010(161): 1871-1883

[7] ZADEH L A. Fuzzy Sets and Information Granularity[J]. Advances in Fuzzy Set Theory and Application, North Holland Publishing, 1979(60):1211-1214

[8] HOBBS J R. Granularity Proc of Ijcal[J]. Los Angeles , 1985(18):432-435.

[9] QIAN Y H, LIANG Y. A Multi-granulation Rough Set[J]. Information Sciences,2010(180):949-970

[10] XU W H, SUN W X. Fuzzy Rough Set Models Over Two Universes[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2013(4): 631-645

Generalized Multi-granulation Fuzzy Rough Set Based on Two Universes

SUN Wen-xing

(Chongqing Water Resources and Electric Engineering College Chongqing , 402160,China)

Abstract: Firstly, this paper defines the support function of the universes, with which the approximation operators of the generalized multi-granulation fuzzy rough set is defined, and then generalized multi-granulation fuzzy rough set based on two universes model is constructed. In addition, the properties of the approximation operators are discussed.

Key words: Rough set; multi-granulation; two universes