doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0003.002

预不变凸模糊映射的一些性质

张 成, 刘 先
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331)

摘 要:首先利用模糊映射的二次可微性,给出了预不变凸模糊映射的一个充要条件,然后建立了预不变凸模糊映射的一个等价条件,结果为预不变凸模糊映射的判断提供了一个新的思路.

关键词:预不变凸模糊映射,二次连续可微,半正定模糊矩阵,等价条件

中图分类号:O159 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)03-0008-04

文献[1]率先提出了模糊数的概念,许多学者对模糊数原理及其应用展开了深入的研究[2,3].近几年,在最优化理论中,模糊映射的凸性以及广义凸性已经成为研究热点,文献[4]首先提出了凸模糊映射的概念,给出了一个模糊映射是凸的等价条件,但没有提出可微的概念,文献[5]考虑了可微的模糊映射,研究了可微情形下的等价条件以及可微凸模糊规划的 KKT 条件,这样便揭开了研究模糊优化问题的序幕[6-8].受文献[7]的启发,利用模糊映射的二次可微性,先证明了预不变凸模糊映射的一个充要条件,进一步,建立了预不变凸模糊映射与半正定模糊矩阵的等价条件.

1 预备知识

用 $\mathbf{R}$ 表示实数集,$K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是非空集合,下面先给出相关定义.

定义 1[4] 模糊数 μ 是具有(1)-(4)的模糊集 μ: $R\to[0,1]$

(1) μ 是上半连续的;

(2) μ 是正规的,存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $\mu(x_0)=1$;

(3) μ 是模糊凸的,$\mu((1-\lambda)x+\lambda y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y)\}$,对所有的 $x,y\in\mathbf{R},\lambda\in[0,1]$;

(4) $cl(\operatorname{supp}\mu)=cl\{x\in\mathbf{R}:\mu(x)>0\}$ 是紧集.

用 F 表示 R 上所有模糊数的集合,模糊数的 α-水平截集($0\leqslant\alpha\leqslant1$), 用 $\mu[\alpha]$表示:

$$[\mu]_\alpha=\begin{cases}\{x\in\mathbf{R}:\mu(x)\geqslant\alpha\},0<\alpha\leqslant1\\ cl(\operatorname{supp}\mu),\quad\alpha=0\end{cases}$$

显然模糊数的 α-水平截集为有界闭区间$[\mu_*(\alpha),\mu^*(\alpha)]$,其中 $\mu_*(\alpha)$表示 $\mu[\alpha]$的左端点,$\mu^*(\alpha)$表示 $\mu[\alpha]$ 的右端点.任意的 $m\in\mathbf{R}$,存在模糊数 $\tilde{m}$,使得 $\tilde{m}(t)=\begin{cases}1,t=m\\0,t\neq m\end{cases}$.

特别地,模糊数$\tilde{0}$被定义为 $\tilde{0}(t)=\begin{cases}1,t=0\\0,t\neq0\end{cases}$.

收稿日期:2014-09-19;**修回日期**:2014-09-22.

作者简介:张成(1990-),男,四川南充人,硕士研究生,从事最优化理论与算法研究.

模糊数 μ 可以表示为 $\{(\mu_*(\alpha),\mu^*(\alpha),\alpha):0\leqslant\alpha\leqslant1\}$.

定义 2[4]　对任意的 $\mu,\nu\in F$,k 为非负实数,模糊数的加法和数乘定义为

$$\mu\,\widetilde{+}\,\upsilon=\{(\mu_*(\alpha)+\upsilon_*(\alpha),\mu^*(\alpha)+\upsilon^*(\alpha),\alpha):0\leqslant\alpha\leqslant1\}\quad k\mu=\{(k\mu_*(\alpha),k\mu^*(\alpha),\alpha):0\leqslant\alpha\leqslant1\}$$

注 1　模糊数的 μ 的相反 $-\mu$ 满足 $(-\mu)x=\mu(-x)$,则 μ 由 $\{(\mu_*(\alpha),\mu^*(\alpha),\alpha):0\leqslant\alpha\leqslant1\}$ 表示,$-\mu$ 由 $\{(-\mu^*(\alpha),-\mu_*(\alpha),\alpha):0\leqslant\alpha\leqslant1\}$ 表示.

注 2　用 $[\mu_*(\alpha),\mu^*(\alpha)]$ 来表示模糊数 μ.

定义 3[6]　对于 $u,v\in F$,如果对任意的 $\alpha\in[0,1]$,$u_*(\alpha)\leqslant v_*(\alpha)$,$u^*(\alpha)\leqslant v^*(\alpha)$,则称 $u\circ v$;如果 $u\circ v$,$v\circ u$,则 $u=v$.如果 $u\circ v$ 并且存在 $\alpha_0\in[0,1]$ 使得 $u_*(\alpha_0)<v_*(\alpha_0)$ 或 $u^*(\alpha_0)<v^*(\alpha_0)$,则称 $u<v$.对于 $u,v\in F$,如果 $u\circ v$ 或 $v\circ u$ 至少有一个成立,则称 u 和 v 是可比较的,否则是不可比较的.

注 3　映射 $F:K\to F$ 是模糊映射.对任意的 $\alpha\in[0,1]$,$x\in K$,F 的 α-水平截集,记为 $F(x)[\alpha]=[F_*(x,\alpha),F^*(x,\alpha)]$.

定义 4[7]　K 是凸集,映射 $F:K\to F$ 是模糊映射,称 $F(x)$ 在 K 上的凸模糊映射.如果 $\forall x,y\in K$,在 K 上 $F_*(x,\alpha)$,$F^*(x,\alpha)$ 都是凸函数,即 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,都有:

$$F_*((1-\lambda)x+\lambda y,\alpha)\leqslant(1-\lambda)F_*(x,\alpha)+\lambda F_*(x,\alpha)$$

$$F^*((1-\lambda)x+\lambda y,\alpha)\leqslant(1-\lambda)F^*(x,\alpha)+\lambda F^*(x,\alpha)$$

定义 5[8]　设 $\eta:K\times K\to R^n$,称 K 为关于 η 的不变凸集,如果 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,都有 $y+\lambda\eta(x,y)\in K$.

条件 C[9]　K 是不变凸集,称 η 满足条件 C,$\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$ 有:

$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$;$\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$

特别地,当 $\eta(x,y)=x-y$ 时,条件 C 显然成立.

条件 D[10]　K 是不变凸集,$F:K\to F$ 是模糊映射,称 F 满足条件 D,$\forall x,y\in K$,都有 $F(y+\eta(x,y))=F(x)$.

显然,当 $\eta(x,y)=x-y$ 时,条件 D 成立.

定义 6[10]　K 是不变凸集,$F:K\to F$ 是模糊映射,称 F 为关于 η 的预不变凸模糊映射.如果 $\forall x,y\in K$,$\lambda\in[0,1]$,都有 $F(y+\lambda\eta(x,y))\circ\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)$.

定义 7[7]　K 是开集,$F:K\to F$ 是模糊映射,称 F 在 K 上连续,如果 $\forall\alpha\in[0,1]$,在 K 上 $F_*(x,\alpha)$ 和 $F^*(x,\alpha)$ 都是连续函数.

定义 8[7]　K 是开集,$F:K\to F$ 是模糊映射,对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in K$,$D_{x_ix_j}$.

$(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示关于 x_i 和变量 x_j 的二阶偏导数.假设 $\widetilde{\nabla}\boldsymbol{F}(x)$ 存在,并且 $\forall\alpha\in[0,1]$,$F_*(x,\alpha)$ 和 $F^*(x,\alpha)$ 都是连续的二阶偏导数,即 $D_{x_ix_j}F_*(x,\alpha)$,$D_{x_ix_j}F^*(x,\alpha)$ 是连续的.定义

$$D_{x_ix_j}F(x)[\alpha]=[D_{x_ix_j}F_*(x,\alpha),D_{x_ix_j}F^*(x,\alpha)]\tag{1}$$

对于 $i,j=1,2,\cdots,n,\alpha\in[0,1]$.如果对于每个 $i,j=1,2,\cdots,n$.式(1)表示一个模糊数的 α-水平截集,则定义模糊映射的 Hessian 矩阵为

$$\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(x)=(D_{x_ix_j}F(x))_{i,j=1,2,\cdots,n}$$

称 F 在点 x 处二次可微,如果模糊映射的 Hessian 矩阵存在,且 $F_*(x,\alpha)$,$F^*(x,\alpha)$ 在点 x 处都是二次可微的.

定义 9[7]　$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 模糊矩阵,其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都是模糊数.称 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 为正定模糊矩阵,如果对于 $\forall\alpha\in[0,1]$,α-水平矩阵的左端 $((a_*)_{ij}(\alpha))$ 和右端 $((a^*)_{ij}(\alpha))$ (其中 $\widetilde{a}_{ij}=<(a_*)_{ij}(\alpha),(a^*)_{ij}(\alpha)>$)

都是正定的.类似的,称$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(a_{ij})$为正半定模糊矩阵,如果$\forall\alpha\in[0,1]$,$\alpha$-水平矩阵的左端$((a_*)_{ij}(\alpha))$和右端$((a^*)_{ij}(\alpha))$ 都是正半定的.

引理 1[7] K是关于η的开凸集,$F:K\to F$是二次可微模糊映射,则F为K上的凸模糊映射当且仅当对$\forall x\in K$,$\widetilde{\nabla^2\boldsymbol{F}}(x)$是半正定模糊矩阵.

2 主要结论及其证明

定理 1 K是关于η的不变凸集,$F:K\to F$是模糊映射,η满足条件 C,F满足条件 D,对$\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,令$G(\lambda)=F(y+\lambda\eta(x,y))$.则$F(x)$为关于$\eta$的预不变凸模糊映射当且仅当$G(\lambda)$为凸模糊映射.

证明 必要性:由条件 C 可知:$\forall x,y\in K,\alpha\in[0,1]$,则

$$\eta(y+\alpha\eta(x,y),y)=\eta(y+\alpha\eta(x,y),y+\alpha\eta(x,y)+\eta(y,y+\alpha\eta(x,y))=$$
$$-\eta(y,y+\alpha\eta(x,y)=\alpha\eta(x,y)$$

若$F(x)$是关于η的预不变凸模糊映射,根据定义得:$\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$, 都有

$$F(y+\lambda\eta(x,y))\circ\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)$$

对$\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$,$\forall\lambda\in[0,1]$. 若$\alpha_1=\alpha_2$,则

$$G(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))=G(\alpha_2)=F(y+\alpha_2\eta(x,y))=$$
$$\lambda F(y+\alpha_2\eta(x,y))+(1-\lambda)F(y+\alpha_2\eta(x,y))=$$
$$\lambda F(y+\alpha_1\eta(x,y))+(1-\lambda)F(y+\alpha_2\eta(x,y))\circ\lambda G(\alpha_1)+(1-\lambda)G(\alpha_2)$$

不失一般性,假设$\alpha_1>\alpha_2$,则$\alpha_1-\alpha_2>0$,由$\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$,可知$\alpha_2\neq1$, 所以,$0<\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}\leqslant1$,则

$$G(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))=F(y+(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))\eta(x,y))=F(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y))$$

又

$$\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y))=\eta(y+\alpha_2\eta(x,y)+(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y))=$$
$$\eta(y+\alpha_2\eta(x,y)+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}\eta(x,y+\alpha_2\eta(x,y)),y+\alpha_2\eta(x,y))=$$
$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}\eta(x,y+\alpha_2\eta(x,y))=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y)$$

故

$$G(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))=F(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y))=$$
$$F(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y))\circ\lambda F(y+\alpha_1\eta(x,y))+$$
$$(1-\lambda)F(y+\alpha_2\eta(x,y))=\lambda G(\alpha_1)+(1-\lambda)G(\alpha_2)$$

同理,当$\alpha_1<\alpha_2$时,仍然有$G(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))\circ\lambda G(\alpha_1)+(1-\lambda)G(\alpha_2)$.

充分性:若$G(\lambda)$为凸模糊映射,则对$\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$

$$F(y+\lambda\eta(x,y))=G(\lambda)=G(\lambda\cdot1+(1-\lambda)\cdot0)\circ\lambda G(1)+(1-\lambda)G(0)=$$
$$\lambda F(y+\eta(x,y))+(1-\lambda)F(y)$$

由条件 D 可知:$\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$F(y+\lambda\eta(x,y))\circ\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)$$

所以$F(x)$是关于η的预不变凸模糊映射.

定理 2　K 是关于 η 的开不变凸集,η 满足条件 C,F 为二次连续可微且满足条件 D,则 $F(x)$ 为关于 η 的预不变凸模糊映射当且仅当对 $\forall x,y\in K$,$\boldsymbol{\eta}(x,y)^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(x)\boldsymbol{\eta}(x,y)$ 为半正定模糊矩阵.

证明 必要性:假设 $F(x)$ 是二次连续可微且关于 η 的预不变凸模糊映射,则由定理 1 可知:对 $\forall x,y\in K$,$\boldsymbol{G}(\lambda)=\boldsymbol{F}(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))$ 是定义在 $[0,1]$ 上的二次连续可微凸模糊映射.根据引理 1 可知:$\forall\lambda\in(0,1)$,都有 $\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{G}(\lambda)$ 是半正定模糊矩阵,而 $\widetilde{\nabla}\boldsymbol{G}(\lambda)=\boldsymbol{\eta}(x,y)^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}\boldsymbol{F}(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))$,$\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{G}(\lambda)=\boldsymbol{\eta}(x,y)^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))\boldsymbol{\eta}(x,y)$.

由 F 的二次连续可微性,令 $\lambda\to0^+$,有 $\boldsymbol{\eta}(x,y)^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(y)\boldsymbol{\eta}(x,y)$ 为半正定模糊矩阵.由 K 是关于 η 的开不变凸集可知:$\forall\lambda\in(0,1)$,有 $y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y)\in K$.结合条件 C,从而 $\boldsymbol{\eta}(y,y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(y)\boldsymbol{\eta}(y,y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))$ 是半正定模糊矩阵,于是 $\forall x,y\in K$,$\boldsymbol{\eta}(x,y)^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(x)\boldsymbol{\eta}(x,y)$ 为半正定模糊矩阵.

充分性:假设 $\forall x,y\in K$,$\boldsymbol{\eta}(x,y)^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(x)\boldsymbol{\eta}(x,y)$ 为半正定模糊矩阵,那么由 K 是关于 η 的开不变凸集可知:$\forall\lambda\in(0,1)$,有 $y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y)\in K$.

因而,$\eta(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y),y)^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))\boldsymbol{\eta}(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y),y)$ 为半正定模糊矩阵,即:$\boldsymbol{\eta}(x,y)^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))\boldsymbol{\eta}(x,y)$ 为半正定模糊矩阵.由 F 的二次连续可微性可知:$\boldsymbol{\eta}(x,y)^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(y)\boldsymbol{\eta}(x,y)$ 为半正定模糊矩阵.

进一步,$\boldsymbol{\eta}(x,y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))^{\mathrm{T}}\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))\boldsymbol{\eta}(x,y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))$ 为半正定模糊矩阵,即 $(1-\lambda)^2\boldsymbol{\eta}(x,y)\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))\boldsymbol{\eta}(x,y)$ 为半正定模糊矩阵.

所以,$\boldsymbol{\eta}(x,y)\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{F}(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y))\boldsymbol{\eta}(x,y)$ 为半正定模糊矩阵. 于是 $\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{G}(\lambda)$ 为半正定模糊矩阵,根据引理 1以及定理 1 可知:$\boldsymbol{F}(x)$ 是关于 η 的预不变凸模糊映射.

定理 2 提供了一种新的判断模糊映射为预不变凸模糊映射的一个新思路.如例 1:

例 1　假设 $x=(-2,-1)\cup(1,2)$ 且 $\eta(x,y)=\begin{cases}x-y,-2<x<-1,-2<y<-1\\ x-y,1<x<2,1<y<2\\ -\dfrac{3}{2},1<x<2,-2<y<-1\\ \dfrac{3}{2},-2<x<-1,1<y<2\end{cases}$,可以验证 η 满足条件 C. 令 $F(x)=\begin{cases}(\alpha(x+\dfrac{3}{2})^2,(1-\alpha)(x+\dfrac{3}{2})^2),-2<x<-1\\ (\alpha(x-\dfrac{3}{2})^2,(1-\alpha)(x-\dfrac{3}{2})^2),1<x<2\end{cases}$,可以验证 $F(x)$ 是二次连续可微且满足条件 D. 对 $\forall x,y\in X$,可以验证 $\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{F}(x)\boldsymbol{\eta}(x,y)$ 为半正定模糊矩阵.由定理 2 可知:$F(x)$ 是关于 η 的预不变凸模糊映射.

(下转第 36 页)