

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0003.001

# 参数未知的分数阶混沌系统的自适应 追踪控制\*

胡玉婷, 李 东, 张兴鹏

(重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331)

**摘 要:**针对一类参数未知的分数阶混沌系统,基于分数阶系统稳定性理论,通过设计控制器和未知参数辨识规则,研究了混沌系统的自适应追踪控制同步问题;并以分数阶 Newton-Leipnik 系统为例进行了数值模拟,验证了方法的可行性和有效性。

**关键词:**分数阶 参数未知 自适应 追踪控制与同步

**中图分类号:**O103

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-058X(2015)03-0001-07

混沌运动存在于自然界的各个领域,是非线性动力学系统所特有的一种运动形式。混沌控制在生物学、流体力学、电力系统、保密通信等都有广泛应用。自 1990 年 Pecora 和 Carroll<sup>[1]</sup>实现了初始条件不同的两个混沌系统的同步以来,混沌同步受到了众多学者的关注。人们提出了很多可以实现整数阶混沌同步的方法,如线性和非线性反馈方法、驱动响应法、自适应控制方法、Backstepping 方法、驱动参量法等<sup>[2-7]</sup>。分数阶微积分的出现时间几乎与整数阶微积分相同,但由于分数阶混沌系统理论的复杂性,其发展速度相对较缓慢。随着自然界中分型和分维的现象被广泛的指出,分数阶微积分迅速成为研究热点。由于分数阶混沌系统在电力、保密通信等方面有着比整数阶更为广阔的应用前景,引起了人们广泛的兴趣和深入的研究。文献[8]将 Backstepping 方法拓展到分数阶系统中并设计控制器实现了分数阶 Newton-Leipnik 系统的同步。文献[9]基于滑模控制实现了分数阶混沌系统的自适应同步。利用自适应方法人们实现了分数阶混沌 Chen 系统<sup>[10]</sup>、分数阶超混沌 Lorenz 系统<sup>[11]</sup>以及一类不确定分数阶混沌系统和超混沌系统<sup>[12,13]</sup>的同步。由于混沌现象通常需要在特定的参数下才会表现,对于参数未知的混沌系统近年来也有较多的研究,文献[14]对一类具有未知参数的整数阶混沌系统,提出了一种基于主动的 Backstepping 设计方法。文献[11,15]分别实现了参数未知的分数阶混沌系统和分数阶超混沌 Lorenz 系统的同步。

对于阶次小于 1 的分数阶系统,胡建兵等<sup>[8]</sup>提出了分数阶系统稳定性判定定理。基于该理论,对一类参数未知的分数阶混沌系统设计控制器和未知参数辨识规则,实现了系统的自适应追踪控制与同步。

## 1 追踪控制分数阶混沌系统

考虑了一类三维分数阶混沌系统,其数学模型为

---

收稿日期:2014-08-12;修回日期:2014-10-18.

\* 基金项目:国家自然科学基金(11202249);中央高校基本科研业务费专项资金(CQDXWL-2013-002)资助的课题.

作者简介:胡玉婷(1991-),女,安徽池州人,硕士研究生,从事微分方程与动力系统研究.

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1x_2x_3 \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2x_1x_3 \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3x_1x_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x_1, x_2, x_3$  是系统的状态变量,  $a_{ij}(i, j=1, 2, 3)$  和  $b_k(k=1, 2, 3)$  是参数, 分数阶阶次  $\alpha$  的范围为  $0 < \alpha \leq 1$ 。已有的很多混沌系统都是这种形式, 例如 Lorenz 系统、Chen 系统、Lu 系统、Qi 系统和 Newton-Leipnik 系统等。

式(1)通常可表示为

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax + Bf \quad (2)$$

$$\text{其中 } x = x(t) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3], f = [x_2x_3 \quad x_1x_3 \quad x_1x_2]^T。$$

当参数未知时, 如何设计控制器和参数辨识规则使得分数阶系统追踪同步任意给定的参考信号  $y(t) = [y_1, y_2, y_3]^T$ , 也就是要使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - y_i\| = 0 (i=1, 2, 3)$  成立, 是现将要解决的问题。

文献[8]通过研究分数阶系统的问题, 提出了一种判断分数阶系统稳定性的充分条件。

**引理 1** 对于分数阶系统  $\frac{d^q X}{dt^q} = f(X)$ , ( $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ), 当分数阶阶次  $0 < q \leq 1$  时, 如果存在正定

矩阵  $P$  使函数  $J = XP \frac{d^q X}{dt^q} \leq 0$  恒成立, 则系统变量  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  渐进稳定。

令分数阶系统(1)的未知参数  $a_{ij}(i, j=1, 2, 3)$  和  $b_k(k=1, 2, 3)$  的估计值分别为  $\hat{a}_{ij}(i, j=1, 2, 3)$  和  $\hat{b}_k(k=1, 2, 3)$ , 则参数估计误差为

$$\begin{cases} e_{ij} = a_{ij} - \hat{a}_{ij} \\ e_{bk} = b_k - \hat{b}_k \end{cases} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

于是

$$\begin{cases} a_{ij} = \hat{a}_{ij} + e_{ij} \\ b_k = \hat{b}_k + e_{bk} \end{cases} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (4)$$

根据系统式(1)、(4)构造新的受控分数阶系统为

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = (\hat{a}_{11} + e_{11})x_1 + (\hat{a}_{12} + e_{12})x_2 + (\hat{a}_{13} + e_{13})x_3 + (\hat{b}_1 + e_{b1})x_2x_3 + u_1 \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} = (\hat{a}_{21} + e_{21})x_1 + (\hat{a}_{22} + e_{22})x_2 + (\hat{a}_{23} + e_{23})x_3 + (\hat{b}_2 + e_{b2})x_1x_3 + u_2 \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} = (\hat{a}_{31} + e_{31})x_1 + (\hat{a}_{32} + e_{32})x_2 + (\hat{a}_{33} + e_{33})x_3 + (\hat{b}_3 + e_{b3})x_1x_2 + u_3 \end{cases} \quad (5)$$

其中  $u_1, u_2, u_3$  为控制器。定义分数阶系统(5)与任意给定的参考信号  $y(t) = [y_1, y_2, y_3]^T$  的追踪同步误差为  $e(t) = x(t) - y(t)$ , 即:

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - y_1 \\ e_2 = x_2 - y_2 \\ e_3 = x_3 - y_3 \end{cases} \quad (6)$$

**定理** 如果选取的控制器为

$$\begin{cases} u_1 = -(1 + \hat{a}_{11})x_1 + y_1 - \hat{a}_{12}y_2 - (\hat{a}_{13} + \hat{b}_1x_2)y_3 + \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} \\ u_2 = -(\hat{a}_{12} + \hat{a}_{21})x_1 - (1 + \hat{a}_{22})x_2 + \hat{a}_{12}y_1 + y_2 - (\hat{a}_{23} + \hat{b}_2x_1)y_3 + \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} \\ u_3 = -(\hat{a}_{13} + \hat{a}_{31})x_1 - (\hat{a}_{23} + \hat{a}_{32})x_2 - (1 + \hat{a}_{33})x_3 - (\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3)x_1x_2 + \\ (\hat{a}_{13} + \hat{b}_1x_2)y_1 + (\hat{a}_{23} + \hat{b}_2x_1)y_2 + y_3 + \frac{d^\alpha y_3}{dt^\alpha} \end{cases} \quad (7)$$

和参数自适应规则为

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \quad (8)$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2x_3e_1 \\ x_1x_3e_2 \\ x_1x_2e_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

则分数阶受控系统式(5)能追踪任意给定的参考信号  $y(t)$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$ 。

**证明** 由式(3)及参数自适应规则式(8)、(9)可得:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = -\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{11} \\ \hat{a}_{11} & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{11} \\ \hat{a}_{11} & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{11} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \quad (10)$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \begin{bmatrix} e_{b1} \\ e_{b2} \\ e_{b3} \end{bmatrix} = -\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2x_3e_1 \\ -x_1x_3e_2 \\ -x_1x_2e_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

根据以上设计的控制器式(7),有:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} = -e_1 + \hat{a}_{12}e_2 + (\hat{a}_{13} + \hat{b}_1x_2)e_3 + x_1e_{11} + x_2e_{12} + x_3e_{13} + x_2x_3e_{b1} \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} = -\hat{a}_{12}e_1 - e_2 + (\hat{a}_{23} + \hat{b}_2x_1)e_3 + x_1e_{21} + x_2e_{22} + x_3e_{23} + x_1x_3e_{b2} \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha y_3}{dt^\alpha} = -(\hat{a}_{13} + \hat{b}_1x_2)e_1 - (\hat{a}_{23} + \hat{b}_2x_1)e_2 - e_3 + x_1e_{31} + x_2e_{32} + x_3e_{33} + x_1x_2e_{b3} \end{cases} \quad (12)$$

根据引理1,选取正定矩阵  $P$  为单位矩阵  $E$ ,则:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} = [e_1, e_2, e_3, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_{b1}, e_{b2}, e_{b3}] & \begin{bmatrix} d^\alpha e_1/dt^\alpha \\ d^\alpha e_2/dt^\alpha \\ d^\alpha e_3/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{11}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{12}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{13}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{21}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{22}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{23}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{31}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{32}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{33}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{b1}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{b2}/dt^\alpha \\ d^\alpha e_{b3}/dt^\alpha \end{bmatrix} = \\
 e_1 \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} + e_2 \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} + e_3 \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} + e_{11} \frac{d^\alpha e_{11}}{dt^\alpha} + e_{12} \frac{d^\alpha e_{12}}{dt^\alpha} + e_{13} \frac{d^\alpha e_{13}}{dt^\alpha} + e_{21} \frac{d^\alpha e_{21}}{dt^\alpha} + e_{22} \frac{d^\alpha e_{22}}{dt^\alpha} + \\
 e_{23} \frac{d^\alpha e_{23}}{dt^\alpha} + e_{31} \frac{d^\alpha e_{31}}{dt^\alpha} + e_{32} \frac{d^\alpha e_{32}}{dt^\alpha} + e_{33} \frac{d^\alpha e_{33}}{dt^\alpha} + e_{b1} \frac{d^\alpha e_{b1}}{dt^\alpha} + e_{b2} \frac{d^\alpha e_{b2}}{dt^\alpha} + e_{b3} \frac{d^\alpha e_{b3}}{dt^\alpha} \quad (13)
 \end{aligned}$$

将式(10)、(11)、(12)代入式(13)得到:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} = e_1(-e_1 + \hat{a}_{12}e_2 + (\hat{a}_{13} + \hat{b}_1x_2)e_3 + x_1e_{11} + x_2e_{12} + x_3e_{13} + x_2x_3e_{b1}) + \\
 e_2(-\hat{a}_{12}e_1 - e_2 + (\hat{a}_{23} + \hat{b}_2x_1)e_3 + x_1e_{21} + x_2e_{22} + x_3e_{23} + x_1x_3e_{b2}) + \\
 e_3(-(\hat{a}_{13} + \hat{b}_1x_2)e_1 - (\hat{a}_{23} + \hat{b}_2x_1)e_2 - e_3 + x_1e_{31} + x_2e_{32} + x_3e_{33} + x_1x_2e_{b3}) + \\
 e_{11}(-x_1e_1) + e_{12}(-x_2e_1) + e_{13}(-x_3e_1) + e_{21}(-x_1e_2) + e_{22}(-x_2e_2) + \\
 e_{23}(-x_3e_2) + e_{31}(-x_1e_3) + e_{32}(-x_2e_3) + e_{33}(-x_3e_3) + e_{b1}(-x_2x_3e_1) + \\
 e_{b2}(-x_1x_3e_2) + e_{b3}(-x_1x_2e_3) = \\
 -e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 \leq 0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

显然式(14)满足引理 1 的条件,则追踪同步误差  $e(t) = [e_1, e_2, e_3]^T$  渐进稳定,即分数阶受控系统式(5)能追踪同步任意给定的信号  $y(t)$ 。

## 2 分数阶 Newton-Leipnik 系统的同步及数值模拟

选取 Newton-Leipnik 系统进行数值模拟,验证定理的有效性。

分数阶 Newton-Leipnik 系统由方程表示:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = cx_1 + x_2 + 10x_2x_3 \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} = -x_1 - 0.4x_2 + 5x_1x_3 \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} = dx_3 - 5x_1x_2 \end{cases} \quad (15)$$

在  $c=-0.4, d=0.175$  的情况下,当  $\alpha \in [0.989, 1)$  时处于混沌状态,且具有双重吸引子;当  $\alpha \in (0.954, 0.989)$  时仍然处于混沌状态,但只有单吸引子<sup>[16]</sup>。

设未知参数  $c, d$  的估计值分别为  $\hat{c}, \hat{d}$ , 参数估计误差为

$$\begin{cases} e_c = c - \hat{c} \\ e_d = d - \hat{d} \end{cases} \quad (16)$$

于是

$$\begin{cases} c = \hat{c} + e_c \\ d = \hat{d} + e_d \end{cases} \quad (17)$$

对分数阶 Newton-Leipnik 系统设计控制器  $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ , 再将式(17)代入有:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = (\hat{c} + e_c)x_1 + x_2 + 10x_2x_3 + u_1 \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} = -x_1 - 0.4x_2 + 5x_1x_3 + u_2 \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} = (\hat{d} + e_d)x_3 - 5x_1x_2 + u_3 \end{cases} \quad (18)$$

在系统式(15)中  $A = \begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ -1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$ ,  $B = [10 \quad 5 \quad -5]$ 。

仍然定义追踪同步误差为

$$e(t) = x(t) - y(t) \quad (19)$$

根据定理,控制器可以选为

$$\begin{cases} u_1 = -(1 + \hat{c})x_1 + y_1 - y_2 - 10x_2y_3 + \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} \\ u_2 = -0.6x_2 + y_1 + y_2 - 5x_1y_3 + \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} \\ u_3 = -(1 + \hat{d})x_3 - 10x_1x_2 + 10x_2y_1 + 5x_1y_2 + y_3 + \frac{d^\alpha y_3}{dt^\alpha} \end{cases} \quad (20)$$

参数自适应规则可以选为

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha \hat{c}}{dt^\alpha} = x_1 e_1 \\ \frac{d^\alpha \hat{d}}{dt^\alpha} = x_3 e_3 \end{cases} \quad (21)$$

那么

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha e_c}{dt^\alpha} = -\frac{d^\alpha \hat{c}}{dt^\alpha} = -x_1 e_1 \\ \frac{d^\alpha e_d}{dt^\alpha} = -\frac{d^\alpha \hat{d}}{dt^\alpha} = -x_3 e_3 \end{cases} \quad (22)$$

由式(18)、(19)、(20)得:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = -e_1 + e_2 + 10x_2 e_3 + x_1 e_c \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} = -e_1 - e_2 + 5x_1 e_3 \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = -10x_2 e_1 - 5x_1 e_2 - e_3 + x_3 e_d \end{cases} \quad (23)$$

再根据式(22)、(23)有:

$$J = [e_1, e_2, e_3, e_c, e_d] \begin{bmatrix} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_c}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_d}{dt^\alpha} \end{bmatrix} = -e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 \leq 0 \quad (24)$$

得到追踪同步误差渐进稳定,完成了分数阶 Newton-Leipnik 系统的自适应追踪同步。

选取参考信号  $y(t) = [0, 0, 0]^T$ , 其仿真结果如图 1 所示。

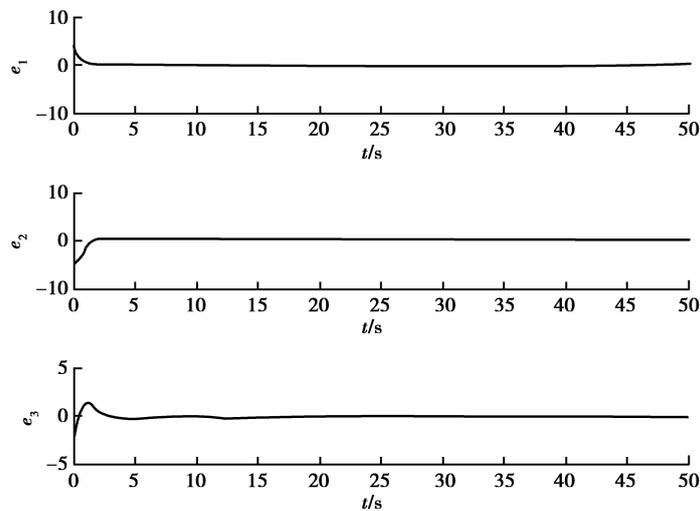


图 1 分数阶 Newton-Leipnik 混沌系统追踪控制到原点的同步误差

### 3 结 论

基于分数阶系统稳定性理论,实现了一类参数未知的分数阶混沌系统同给定信号的追踪控制与同步。最后以分数阶 Newton-Leipnik 混沌系统为例,设计控制器和未知参数辨识规则,实现了分数阶 Newton-Leipnik 混沌系统的控制与同步问题并给出了数值仿真模拟。

#### 参考文献:

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in Chaotic Systems [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64: 821-824
- [2] 陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步[J]. 动力学与控制学报, 2006(1): 1-4
- [3] 陈志盛, 孙克辉, 张泰山. Liu 混沌系统的非线性反馈同步控制[J]. 物理学报, 2005(6): 2580-2583
- [4] 单梁, 李军, 王执铨. 参数不确定 Liu 混沌系统的自适应同步[J]. 动力学与控制学报, 2006(4): 338-343
- [5] 陈强, 任雪梅, 那靖. 参数不确定混沌系统的自适应 Backstepping 控制[J]. 北京理工大学学报, 2011(2): 158-162
- [6] 杨世平, 牛海燕, 田钢, 等. 用驱动参量法实现混沌系统的同步[J]. 物理学报, 2001(4): 619-623
- [7] 李农, 李建芬, 刘宇平. 一类参数未知混沌系统的追踪控制与参数辨识[J]. 物理学报, 2011(5): 106-112
- [8] 胡建兵, 韩焱, 赵灵冬. 一种新的分数阶系统稳定理论及在 back-stepping 方法同步分数阶混沌系统中的应用[J]. 物理学报, 2009(4): 2235-2239
- [9] 曹鹤飞, 张若洵. 基于滑模控制的分数阶混沌系统的自适应同步[J]. 物理学报, 2011(5): 127-131
- [10] 彭艳艳, 李庶民, 何书霞. 参数经局部扰动的分数阶混沌 Chen 系统的自适应追踪控制与同步[J]. 科学技术与工程, 2011, 27: 6521-6524
- [11] 赵灵冬, 胡建兵, 刘旭辉. 参数未知的分数阶超混沌 Lorenz 系统的自适应追踪控制与同步[J]. 物理学报, 2010(4): 2305-2309
- [12] HUILING X, SIMIN Y, RUIXIA Z. Adaptive Impulsive Synchronization for a Class of Fractional-order Chaotic and Hyperchaotic Systems[J]. Optik - International Journal for Light and Electron Optics, 2013, 27: 2011-2017
- [13] 严胜利, 张昭晗. 一类不确定分数阶混沌系统的同步控制[J]. 系统仿真技术, 2013(4): 366-370
- [14] 傅桂元, 李钟慎. 一类参数未知混沌系统的自适应控制[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2010(2): 145-148
- [15] 靳庆生, 李庶民. 参数未知的分数阶混沌系统的自适应同步[J]. 科技信息, 2013(11): 48-49
- [16] 王明军, 王兴元. 分数阶 Newton-leipnik 系统的动力学分析[J]. 物理学报, 2010(3): 1583-1592

## Adaptive Tracking Control of Fractional Order Chaotic Systems with Unknown Parameters

**HU Yuting, LI Dong, ZHANG Xingpeng**

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** Based on stability theory of fractional order system, focusing on a class of unknown fractional order chaotic systems, this paper studies adaptive tracking control and synchronization of chaotic systems by designing the controller and unknown parameter identification rules. With numerical simulation of fractional order such as Newton-Leipnik system, the results verifies the feasibility and validity of the method.

**Key words:** Fractional order; unknown parameters; adaptive; tracking control and synchronization