

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0002.008

## 分数阶神经元系统的稳定性控制\*

李凤英, 吴然超\*\*

(安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601)

**摘要:**用一种状态反馈控制器实现对一类非线性分数阶 Hindmarsh-Rose(HR)神经元系统的稳定性控制,根据分数阶线性系统的稳定性理论,得出受控系统稳定的充分条件;最后给出数值模拟,验证定理的结论,并通过分析得到受控系统可通过改变反馈增益系数来扩大系统的稳定域。

**关键词:**分数阶;稳定性;Hindmarsh-Rose 神经元模型;反馈控制

**中图分类号:**O231.4      **文献标识码:**A      **文章编号:**1672-058X(2015)02-0037-06

HR 神经元模型是 20 世纪 80 年代提出的,它在描述神经系统、神经元兴奋性和心肌纤维等生理过程中有重要的作用,并且用模型来研究神经元的放电行为。分岔是神经元放电的动力学机制,控制神经元的放电活动是理论神经科学中最吸引力的研究内容之一,并且有极大地临床价值。最近研究人员对整数阶的 HR 神经元模型的稳定和分岔研究的较多,而分数阶的研究还较少。

近几年来,分数阶微分方程,尤其是分数阶动力方程,越来越受研究人员的广泛关注和兴趣。一方面是由于分数阶微分积分学理论的自身发展,另一方面是由于分数阶微分方程能更好地描述物质的特性,文献[1-3]分别研究了分数阶方程在信号处理、控制理论和电化学等领域的广泛应用。从文献[4]中知道系统的分岔控制已经吸引了很多研究人员的关注,由于它在各个领域都有着潜在的应用性,如研究电力系统,人的心率和神经活动行为及人类大脑皮层的活动等领域。文献[5,6]给出了几种分岔控制的方法,采用了一个含有过滤器的动态状态反馈控制律的方法来研究一个改变固有的 Hopf 分岔的问题,并对 Lorenz 和 Rossler 系统采用了带有多项式函数状态反馈控制的方法来控制其分岔,可知状态反馈控制在 Hopf 分岔方面已经成功地应用到了自治系统中。分数阶控制系统相比传统的整数阶控制系统的控制性能有更大的优越性,然而,关于分数阶系统的反馈控制还研究很少。

现将研究状态反馈控制器下的一类分数阶 HR 神经元模型的稳定性,得出受控系统稳定性的充分条件。控制方法可以通过改变反馈增益系数较快地控制系统的稳定性。最后给出数值模拟验证此控制下的结论的正确性及其控制效果。

---

收稿日期:2014-05-20;修回日期:2014-07-12.

\* 基金项目:高等学校博士学科点专项基金(20093401120001);安徽省自然科学基金(11040606M12);安徽大学“211 项目”(KJJQ1102)资助.

作者简介:李凤英(1987-),女,安徽阜阳市人,硕士研究生,从事非线性动力系统研究.

\*\* 通讯作者:吴然超(1971-),男,安徽六安市人,博士,教授,从事非线性动力系统研究.Email:rcwu@ahu.edu.cn.

## 1 预备知识

分数阶导数有 3 种定义,即 Grünwald-Letnikov 定义, Riemann-Liouville 定义和 Caputo 定义。现采用的是 Caputo 定义。

一元函数  $x(t)$  的 Caputo 分数阶导数定义:

$$D_{a,t}^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau, (n-1 < \alpha \leq n) \quad (1)$$

其中  $a, t$  分别为积分的下限和上限,  $x^{(n)}(t)$  为  $x(t)$  的  $n$  阶微分,  $\Gamma(\cdot)$  是 Eulergamma 函数。

考虑分数阶微分的线性系统如下:

$$\begin{cases} D^{\alpha} x = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $x(0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^T, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$  且矩阵  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}, \alpha \in (0, 1], D^{\alpha}$  为  $\alpha$  阶分数微分算子。

分数阶线性微分系统的稳定性已经得到了深入的研究,得到了判断稳定性的定理。

**引理 1**<sup>[7]</sup> 系统(2)是渐近稳定的当且仅当  $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ ; 系统(2)是不稳定的当且仅当  $|\arg(\lambda)| \leq$

$\frac{\alpha\pi}{2}$ , 其中  $\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值。

再考虑分数阶微分的非线性系统:

$$D^{\alpha} x = g(x) \quad (3)$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  且  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in \mathbf{R}^n$  的非线性函数,  $\alpha \in (0, 1], D^{\alpha}$  为  $\alpha$  阶分数微分算子。

**引理 2**<sup>[8]</sup> 如果当  $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$  时,  $\lambda$  为系统(3)在平衡点  $x_0$  处的雅可比矩阵  $J = \frac{\partial g}{\partial x}$  的特征值, 即  $x_0$  满足  $g(x_0) = 0$ , 则系统(3)在平衡点  $x_0$  处是局部渐近稳定的。

## 2 神经元模型及主要结论

Tsuji 等人<sup>[9]</sup>详细地分析了这个二维的整数阶 HR 神经元模型,其系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = c(x - \frac{x^3}{3} - y + I) \\ \dot{y} = \frac{x^2 + dx - by + a}{c} \end{cases} \quad (4)$$

其中  $x, y$  分别对应于神经元系统的膜电位和恢复变量,  $a, b, c$  和  $d$  为参数,  $I$  为外加电流强度。现将讨论二维的分数阶 HR 神经元模型,其系统为

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} x = c(x - \frac{x^3}{3} - y + I) \\ D_t^{\alpha} y = \frac{x^2 + dx - by + a}{c} \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $D_t^\alpha$  是  $x, y$  的  $\alpha$  阶 Caputo 微分算子, 这里当  $\alpha = 1$  时就是系统(4)。

由系统(5)可知道阶数没有改变系统的平衡点, 这里设系统(5)的平衡点为  $E_0 = (x_0, y_0)$ , 故它是下面方程组的解:

$$\begin{cases} x - \frac{x^3}{3} - y + I = 0 \\ x^2 + dx - by + a = 0 \end{cases} \quad (6)$$

系统(5)在平衡点  $E_0$  处的雅可比矩阵:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} c(1 - x_0^2) & -c \\ \frac{2x_0 + d}{c} & -\frac{b}{c} \end{pmatrix} \quad (7)$$

雅可比矩阵对应的特征方程为

$$\lambda^2 + m\lambda + n = 0 \quad (8)$$

其中,  $m = \frac{b}{c} - c(1 - x_0^2)$ ,  $n = 2x_0 + d - b(1 - x_0^2)$ 。

引理 3<sup>[10]</sup> 对于系统(5), 有结论:

(1) 如果  $m > 0$ , 且  $n > 0$ , 则当  $\alpha \in (0, 1]$  时, 系统(5)的平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的;

(2) 如果  $n < \frac{1}{4}m^2$ , 且  $m < 0$ , 则当  $\alpha \in (0, 1]$  时, 系统(5)的平衡点  $E_0$  是不稳定的;

(3) 如果  $n > \frac{1}{4}m^2$ , 且  $m < 0$ , 则当  $\alpha \in (0, \alpha^*)$  时, 系统(5)的平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的, 当  $\alpha \in$

$[\alpha^*, 1]$  时, 系统(5)的平衡点  $E_0$  是不稳定的, 其中  $\alpha^* = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{-\sqrt{4n - m^2}}{m}$ 。

### 3 分数阶 HR 模型的状态反馈控制

对系统(5)进行线性反馈控制如下:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x = c(x - \frac{x^3}{3} - y + I) + k_1(x - x_0) \\ D_t^\alpha y = \frac{x^2 + dx - by + a}{c} + k_2(y - y_0) \end{cases} \quad (9)$$

这里  $k_1, k_2$  是反馈增益系数, 这种控制使得控制前后系统的平衡点不变。

系统(9)在平衡点  $E_0$  的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} c(1 - x_0^2) + k_1 & -c \\ \frac{2x_0 + d}{c} & -\frac{b}{c} + k_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

雅可比矩阵对应的特征方程为

$$\lambda^2 + m_k \lambda + n_k = 0 \quad (11)$$

其中

$$m_k = \frac{b}{c} - c(1 - x_0^2) - k_1 - k_2 \quad (12)$$

$$n_k = 2x_0 + d - (b - ck_2)(1 - x_0^2) - \frac{b}{c}k_1 + k_1k_2 \quad (13)$$

**定理** 如果  $n_k > \frac{1}{4}m_k^2$  且  $m_k < 0$ , 则当  $\alpha \in (0, \alpha_k^*)$  时, 系统(9)的平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的, 当  $\alpha \in [\alpha_k^*, 1]$  时, 系统(9)的平衡点  $E_0$  是不稳定的, 这里

$$\alpha_k^* = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{-\sqrt{4n_k - m_k^2}}{m_k} \quad (14)$$

**证明** 因为  $n_k > \frac{1}{4}m_k^2$ , 所以(11)有一对共轭的复根  $\lambda_1, \lambda_2$ , 由求根公式得:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-m_k \pm \sqrt{4n_k - m_k^2}}{2} \quad (15)$$

因此, 得到  $\lambda_1, \lambda_2$  的幅角的正切  $\tan(\arg \lambda_1) = \frac{\sqrt{4n_k - m_k^2}}{m_k}$ ,  $\tan(\arg \lambda_2) = \frac{-\sqrt{4n_k - m_k^2}}{m_k}$ , 又因为  $m_k < 0$ , 故

$|\arg(\lambda_{1,2})| = \arctan \frac{-\sqrt{4n_k - m_k^2}}{m_k}$ , 由引理 2, 3 可知当  $|\arg(\lambda_{1,2})| = \arctan \frac{-\sqrt{4n_k - m_k^2}}{m_k} > \frac{\alpha\pi}{2}$ , 即  $\alpha \in (0, \alpha_k^*)$  时, 系

统(9)的平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的, 当  $|\arg(\lambda_{1,2})| = \arctan \frac{-\sqrt{4n_k - m_k^2}}{m_k} \leq \frac{\alpha\pi}{2}$ , 即  $\alpha \in [\alpha_k^*, 1]$  时, 系统(9)的平衡点  $E_0$  是不稳定的。定理得证。

**注:** 定理中当  $k_1, k_2$  都为 0 时, 即为引理 3 的情况, 给定参数后能确定系统的稳定域; 当  $k_1$  不为 0,  $k_2$  为 0 时是参考文献[11]中所研究的控制情况, 即只对  $x$  进行控制, 这种控制下给  $k_1$  适当的值且满足定理条件能扩大系统的稳定域; 而此通过  $k_1, k_2$  对  $x, y$  进行同时控制也能扩大系统的稳定域, 且较文献[11]可以更快地达到稳定效果, 更灵敏地扩大稳定域。显然这里的线性反馈控制通过适当改变反馈增益系数  $k_1, k_2$  且满足定理条件时能更明显快速地扩大系统的稳定域。

## 4 数值举例

**例 1** 在系统(5)中取  $a = -1, b = 1.4, c = 3, d = 1.8$  和  $I = 0$ , 通过计算可得系统(5)的平衡点  $E_0 = (0.727 5, 0.599 2)$ , 满足引理 3 可计算出稳定到不稳定的临界阶数  $\alpha^* = 0.810 4$ , 故当  $\alpha \in (0, 0.810 4)$  时, 系统(5)的平衡点  $E_0$  是渐近稳定的, 当  $\alpha \in [0.810 4, 1]$  时, 平衡点  $E_0$  是不稳定的。这里取  $\alpha = 0.75$  (图 1), 再取  $\alpha = 0.85$  (图 2), 可以知道当  $\alpha$  穿过临界值时, 系统失去了稳定性, 并出现周期振荡现象, 此时在参数下系统的稳定域为  $(0, 0.810 4)$ 。

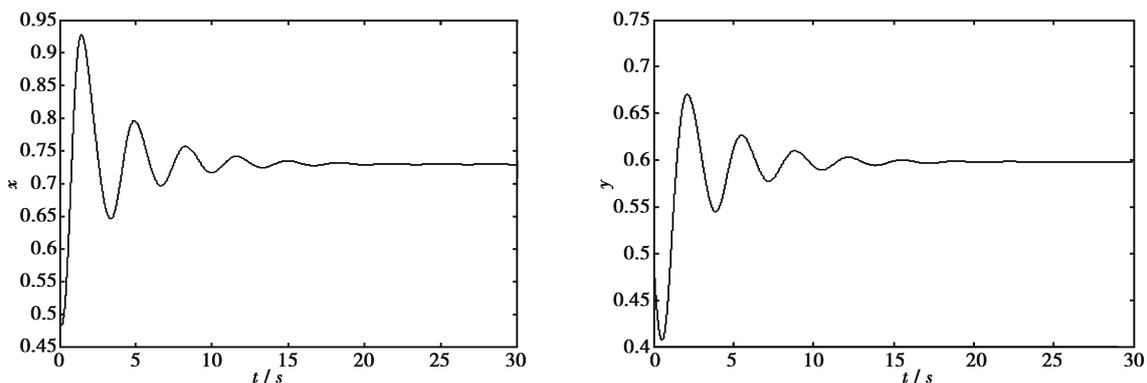


图 1 系统(5)平衡点  $E_0$  在  $\alpha = 0.75$  时的稳定性

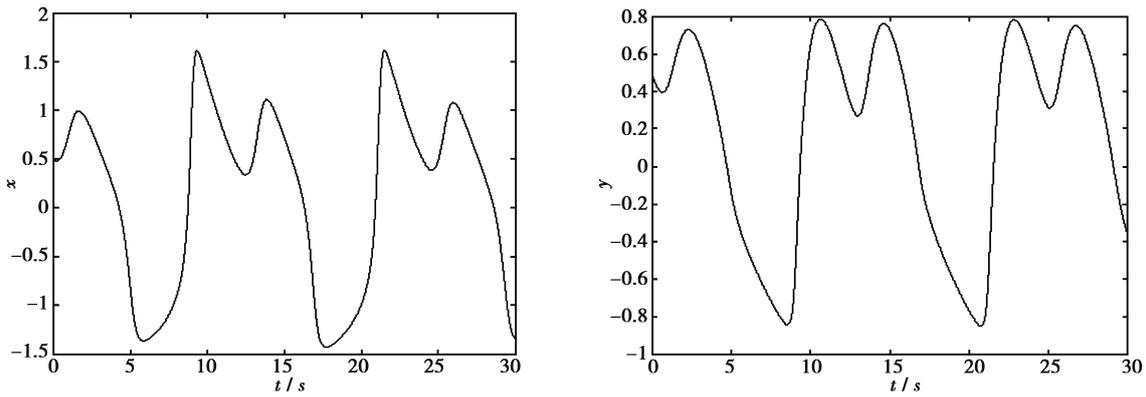


图 2 系统(5)平衡点  $E_0$  在  $\alpha=0.85$  时的不稳定性

例 2 在系统(9)中取  $a=-1, b=1.4, c=3, d=1.8$  和  $I=0$ , 若取反馈增益系数  $k_1=-0.7, k_2=0.2$ , 此时满足定理条件, 可计算出稳定到不稳定的临界阶数  $\alpha_k^* = 0.9188$ , 故当  $\alpha \in (0, 0.9188)$  时, 系统(9)的平衡点  $E_0$  是渐近稳定的, 当  $\alpha \in [0.9188, 1]$  时, 平衡点  $E_0$  是不稳定的, 取  $\alpha = 0.85$  如图 3 所示, 此时的稳定域为  $(0, 0.9188)$ 。若取反馈增益系数  $k_1=-0.9, k_2=0.1$ , 满足定理条件, 可计算出稳定到不稳定的临界阶数  $\alpha_k^* = 0.9735$ , 故当  $\alpha \in (0, 0.9735)$  时, 系统(9)的平衡点  $E_0$  是渐近稳定的, 当  $\alpha \in [0.9735, 1]$  时, 平衡点  $E_0$  是不稳定的, 取  $\alpha = 0.92$  如图 4 所示, 此时的稳定域为  $(0, 0.9735)$ 。

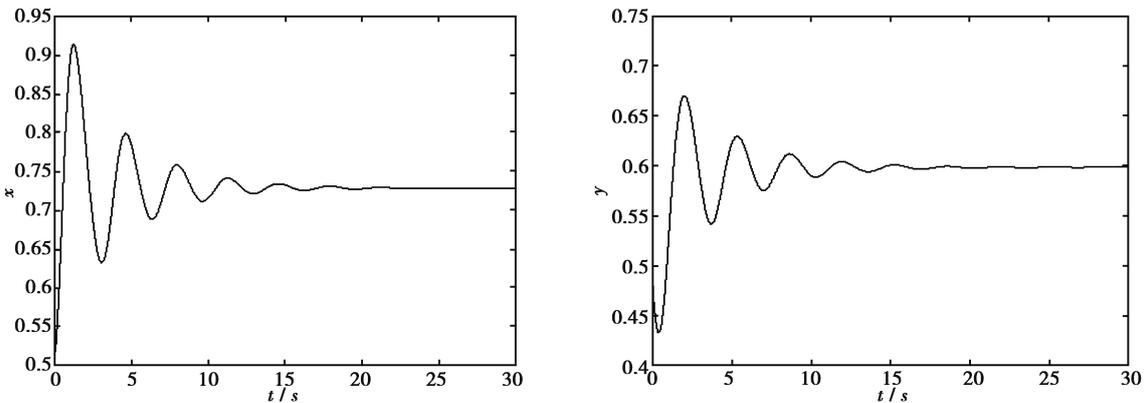


图 3 系统(9)平衡点  $E_0$  在  $\alpha=0.85$  时的稳定性

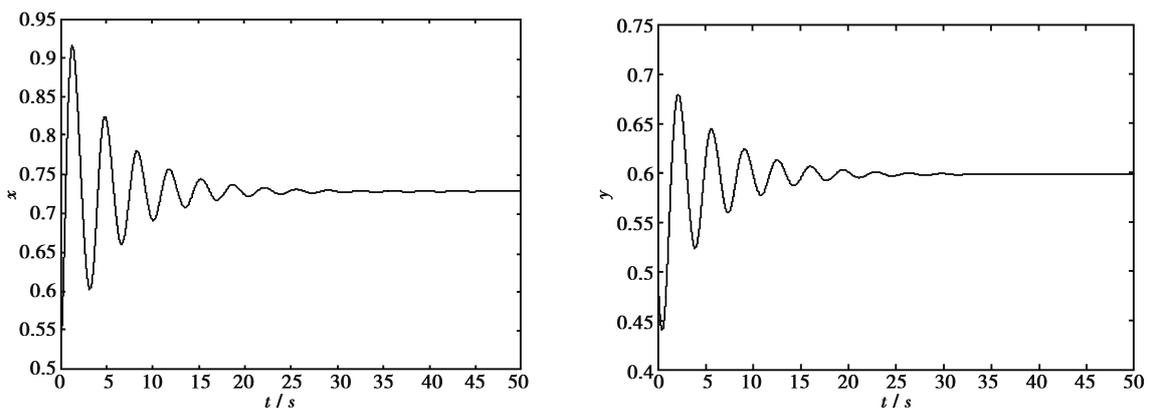


图 4 系统(9)平衡点  $E_0$  在  $\alpha=0.92$  时的稳定性

分析可知,如果适当地选择反馈增益系数  $k_1, k_2$  可以使分数阶神经元系统的稳定域尽可能的大,所以,此状态反馈控制器能较好地控制系统的稳定性。

#### 参考文献:

- [1] NANA B, WOAFO P, DOMNGANG S. Chaotic synchronization with experimental application to secure communications [J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2009, 14: 2266-2267
- [2] MATIGNON D. Stability results for fractional differential equations with applications to control precessing [J]. *Computation Engineering in System application*, 1996(4): 145-152
- [3] MATOUK A. feedback control and synchronization of a fractional-order modified autonomous Van der Pol-Duffing circuit [J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2011, 16: 975-986
- [4] CHEN G R, MOIOLA J L, WANG H O. Bifurcation control: Theories, Methods and Applications [J]. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2000, 10: 511-548
- [5] WANG H, ABED E H. Bifurcation control of a chaotic system [J]. *Automatica*, 1995, 31: 1213-1226
- [6] YU P, CHEN G R. Hopf bifurcation control using nonlinear feedback with polynomial functions [J]. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2004, 14: 1683-1704
- [7] QNIA D L, LI C P. Stability analysis of fractional differential system with Remann-Liouville derivative [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, 14: 862-874
- [8] AHMED E, EL S A, EL S H. Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional order Predator-Prey and Rabies models [J]. *Math Anal Appl*, 2007, 325: 542-553
- [9] TSUJI S, UETA T, KAMAKAMI H. Bifurcations in two-dimensional Hindmarsh-Rose type model [J]. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2007, 17: 985-998
- [10] XIAO M. Stability analysis and Hopf-type bifurcation of a fractional order Hindmarsh-Rose neuronal model [M]. *Advances in Neural Networks: ISNN Springer Berlin Heidelberg*, 2012
- [11] XIAO M. Bifurcation control of a fractional order Hindmarsh-Rose neuronal model [M]. *Advances in Neural Networks: ISNN Springer Berlin Heidelberg*, 2013

## Stability Control of Fractional Order Neuron System

**LI Feng-ying, WU Ran-chao**

(School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China)

**Abstract:** The stability control of a class of nonlinear fractional order Hindmarsh-Rose (HR) neuron system is implemented by a state feedback controller, according to the stability theory of fractional order linear system. The sufficient condition for the stability of the controlled system is obtained, and finally numerical simulation is given to prove the conclusion of the theorem, and that the stability domain of the system can be expanded via changing feedback gain coefficient in the controlled system through the analysis.

**Key words:** fractional order; stability; Hindmarsh-Rose Neuron Model; feedback control

责任编辑:田 静