第 32 卷第 1 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2015 年 1 月
Vol. 32 NO.1 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Jan.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0001.002

一类与 Taylor 展开有关的 Bezout 矩阵 *

曹 萌
(安徽大学 数学科学学院,合肥 230601)

摘 要:根据多项式的 Taylor 展开,首先给出了多项式对在基$\{1,x-a,\cdots,(x-a)^{n-1}\}$下的 Bezout 矩阵的表达式;其次得到了该 Bezout 矩阵中元素的一种具体算法;最后通过一个实例来加以说明.

关键词:Taylor 展开;经典 Bezout 矩阵;Bernstein Bezout 矩阵;算法

中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)01-0005-06

Bezout 矩阵是由多项式对定义出的特殊方阵,是一种基础的研究工具.自 18 世纪引入以来,关于 Bezout 矩阵的研究受到了广大科研工作者们的高度重视,现已被广泛应用于控制论、多项式稳定性系统等领域中[1-2].关于 Bezout 矩阵性质的研究,国内的研究者们对其做出过一些详细的探讨,给出了一些不错的性质,具体可参考文献[3-7].文中第一节先回顾几个需要用到的定义;第二节给出了多项式对在基$\{1,x-a,\cdots,(x-a)^{n-1}\}$下的 Bezout 矩阵$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)$的表达式;第三节提供了求解该 Bezout 矩阵$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)$中元素的一种具体算法;最后一节中,通过所列举出的一个简单实例,对前面的定理给予验证说明.

1 预备知识

定义 1[8,9] 称线性空间$P[x]_n$中n个线性无关的向量$\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$为多项式的标准幂基,$\{\beta_0^{(n-1)}(x),\beta_1^{(n-1)}(x),\cdots,\beta_{n-1}^{(n-1)}(x)\}$为多项式的 Bernstein 基,其中

$$\beta_k^{(n-1)}(x)=\binom{n-1}{k}(1-x)^{n-k-1}x^k,0\leqslant k\leqslant n-1$$

定义 2[10] 对于给定的多项式对

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}f_ix^i=\sum_{i=0}^{n}u_i\,\beta_i^{(n)}(x),g(x)=\sum_{i=0}^{n}g_ix^i=\sum_{i=0}^{n}v_i\beta_i^{(n)}(x)$$

称由生成函数

$$\tau(x,y)=\frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y}=\sum_{i,j=1}^{n}\hat{b}_{i,j}x^{i-1}y^{j-1}$$

所定义的矩阵$\hat{\boldsymbol{B}}(f,g)=(\hat{b}_{i,j})_{i,j=1}^{n}$为$f(x)$和$g(x)$在标准幂基$\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$下的经典 Bezout 矩阵;称由生成函数

$$\tau(x,y)=\frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y}=\sum_{i,j=1}^{n}b_{i,j}\,\beta_{i-1}^{(n-1)}(x)\beta_{j-1}^{(n-1)}(y)$$

收稿日期:2014-05-23;**修回日期**:2014-06-27.

* **基金项目**:安徽省自然科学基金资助项目(1208085MA02).

作者简介:曹萌(1991-),男,安徽六安人,硕士研究生,从事矩阵与算子理论、多项式与线性控制系统理论的研究.

所定义的矩阵 $\boldsymbol{B}(f,g)=(b_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 Bernstein 基 $\{\beta_0^{(n-1)}(x),\beta_1^{(n-1)}(x),\cdots,\beta_{n-1}^{(n-1)}(x)\}$ 下的 Bernstein Bezout 矩阵.

2 多项式对在基 $\{1,x-a,\cdots,(x-a)^{n-1}\}$ 下 Bezout 矩阵的表达式

引理 1[11] 标准幂基 $\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 和 Bernstein 基 $\{\beta_0^{(n-1)}(x),\beta_1^{(n-1)}(x),\cdots,\beta_{n-1}^{(n-1)}(x)\}$ 之间满足关系式

$$\begin{pmatrix}1\\x\\\vdots\\x^{n-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{K}_{n-1}\begin{pmatrix}\beta_0^{(n-1)}(x)\\\beta_1^{(n-1)}(x)\\\vdots\\\beta_{n-1}^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{K}_{n-1}=(k_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ 满足

$$k_{i,j}=\begin{cases}\dbinom{j-1}{i-1}\dbinom{n-1}{i-1}^{-1}, & i\leqslant j\\ 0, & i>j\end{cases}$$

证明 容易得出

$$x^i=(1-x+x)^{n-i-1}x^i=\sum_{k=0}^{n-i-1}\binom{n-i-1}{k}(1-x)^{n-i-k-1}x^{i+k}=$$
$$\sum_{r=i}^{n-1}\binom{n-i-1}{r-i}(1-x)^{n-r-1}x^r=\sum_{r=i}^{n-1}\binom{n-i-1}{r-i}\binom{n-1}{r}^{-1}\beta_r^{(n-1)}(x)=$$
$$\sum_{r=i}^{n-1}\binom{r}{i}\binom{n-1}{i}^{-1}\beta_r^{(n-1)}(x)$$

等号两边分别取 $i=0,1,\cdots,n-1$,可知

$$\begin{cases}1=\beta_0^{(n-1)}(x)+\beta_1^{(n-1)}(x)+\cdots+\beta_{n-1}^{(n-1)}(x)\\ x=\dbinom{1}{1}\dbinom{n-1}{1}^{-1}\beta_1^{(n-1)}(x)+\dbinom{2}{1}\dbinom{n-1}{1}^{-1}\beta_2^{(n-1)}(x)+\cdots+\dbinom{n-1}{1}\dbinom{n-1}{1}^{-1}\beta_{n-1}^{(n-1)}(x)\\ \cdots\\ x^{n-1}=\dbinom{n-1}{n-1}\dbinom{n-1}{n-1}^{-1}\beta_{n-1}^{(n-1)}(x)\end{cases}$$

从而引理 1 成立,证毕.

定理 1 对于任意的 $a\in\mathbf{R}$,$(1,x-a,\cdots,(x-a)^{n-1})=(1,x,\cdots,x^{n-1})\boldsymbol{A}_{n-1}$ 成立,其中

$$\boldsymbol{A}_{n-1}=\begin{pmatrix}1 & -a & a^2 & \cdots & (-1)^{n-1}a^{n-1}\\ 0 & 1 & -2a & \cdots & (-1)^{n-2}(n-1)a^{n-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{n-3}\dfrac{(n-2)(n-1)}{2!}a^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

称为标准幂基 $\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 到基 $\{1,x-a,\cdots,(x-a)^{n-1}\}$ 的过渡矩阵.

证明 由二项式定理 $(x-a)^i=\sum_{j=0}^{i}C_i^j(-1)^{i-j}a^{i-j}x^j$,$0\leqslant i\leqslant n-1$ 易知,定理 1 成立,证毕.

定理 2　设给定的多项式对

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}f_ix^i=\sum_{i=0}^{n}u_i\beta_i^{(n)}(x),g(x)=\sum_{i=0}^{n}g_ix^i=\sum_{i=0}^{n}v_i\beta_i^{(n)}(x)$$

在基$\{1,x-a,\cdots,(x-a)^{n-1}\}$下的 Bezout 矩阵为$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)=(\tilde{b}_{i,j})_{i,j=1}^{n}$,则有

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)=\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{K}_{n-1}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(f,g)\boldsymbol{K}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-\mathrm{T}}\tag{1}$$

证明　由题设条件和定义 2,引理 1 以及定理 1 可知

$$\frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y}=(\beta_0^{(n-1)}(x),\beta_1^{(n-1)}(x),\cdots,\beta_{n-1}^{(n-1)}(x))\boldsymbol{B}(f,g)\begin{pmatrix}\beta_0^{(n-1)}(y)\\\beta_1^{(n-1)}(y)\\\vdots\\\beta_{n-1}^{(n-1)}(y)\end{pmatrix}=$$

$$(1,x,\cdots,x^{n-1})\boldsymbol{K}_{n-1}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(f,g)\boldsymbol{K}_{n-1}^{-1}\begin{pmatrix}1\\y\\\vdots\\y^{n-1}\end{pmatrix}=$$

$$(1,x-a,\cdots,(x-a)^{n-1})\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{K}_{n-1}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(f,g)\boldsymbol{K}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\y-a\\\vdots\\(y-a)^{n-1}\end{pmatrix}=$$

$$(1,x-a,\cdots,(x-a)^{n-1})\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)\begin{pmatrix}1\\y-a\\\vdots\\(y-a)^{n-1}\end{pmatrix}$$

故$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)=\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{K}_{n-1}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(f,g)\boldsymbol{K}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-\mathrm{T}}$成立,证毕.

3　$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)$中元素的具体算法

在这一节中,对$f(x)$和$g(x)$进行 Taylor 展开后,利用基本算数运算,给出了求解$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)$中元素的一种具体算法.

引理 2[11]　多项式对$f(x)=\sum_{i=0}^{n}f_ix^i=\sum_{i=0}^{n}u_i\beta_i^{(n)}(x),g(x)=\sum_{i=0}^{n}g_ix^i=\sum_{i=0}^{n}v_i\beta_i^{(n)}(x)$在 Bernstein 基$\{\beta_0^{(n-1)}(x),\beta_1^{(n-1)}(x),\cdots,\beta_{n-1}^{(n-1)}(x)\}$下的 Bernstein Bezout 矩阵$\boldsymbol{B}(f,g)=(b_{i,j})_{i,j=1}^{n}$的具体算法如下:

$$b_{i,1}=\frac{n}{i}(u_iv_0-u_0v_i),1\leqslant i\leqslant n\tag{2}$$

$$b_{i,j+1}=\frac{n^2}{i(n-j)}(u_iv_j-u_jv_i)+\frac{j(n-i)}{i(n-j)}b_{i+1,j},1\leqslant i,j\leqslant n-1\tag{3}$$

$$b_{n,j+1}=\frac{n}{n-j}(u_nv_j-u_jv_n),1\leqslant j\leqslant n-1\tag{4}$$

定理 3　多项式对$f(x)=\sum_{i=0}^{n}f_ix^i=\sum_{i=0}^{n}u_i\beta_i^{(n)}(x),g(x)=\sum_{i=0}^{n}g_ix^i=\sum_{i=0}^{n}v_i\beta_i^{(n)}(x)$在基$\{1,x-a,\cdots,(x-a)^{n-1}\}$下的 Bezout 矩阵$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)=(\tilde{b}_{i,j})_{i,j=1}^{n}$的具体算法如下:

$$\tilde{b}_{i,1}=\frac{f^{(i)}(a)g(a)-g^{(i)}(a)f(a)}{i!},1\leqslant i\leqslant n \tag{5}$$

$$\tilde{b}_{i,j+1}=\frac{f^{(i)}(a)g^{(j)}(a)-f^{(j)}(a)g^{(i)}(a)}{i!\ j!}+\tilde{b}_{i+1,j},1\leqslant i,j\leqslant n-1 \tag{6}$$

$$\tilde{b}_{n,j+1}=\frac{f^{(n)}(a)g^{(j)}(a)-f^{(j)}(a)g^{(n)}(a)}{n!\ j!},1\leqslant j\leqslant n-1 \tag{7}$$

证明 由题设条件可知

$$f(x)g(y)-f(y)g(x)=(x-y)\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{b}_{i,j}(x-a)^{i-1}(y-a)^{j-1}$$

根据 Taylor 展开可知

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^{i},g(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{g^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^{i}$$

故有

$$f(x)g(y)-f(y)g(x)=\sum_{i,j=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)g^{(j)}(a)-f^{(j)}(a)g^{(i)}(a)}{i!\ j!}(x-a)^{i}(y-a)^{j}$$

从而有

$$(x-y)\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{b}_{i,j}(x-a)^{i-1}(y-a)^{j-1}=\sum_{i,j=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)g^{(j)}(a)-f^{(j)}(a)g^{(i)}(a)}{i!\ j!}(x-a)^{i}(y-a)^{j}$$

由于

$$(x-y)\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{b}_{i,j}(x-a)^{i-1}(y-a)^{j-1}=[(x-a)-(y-a)]\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{b}_{i,j}(x-a)^{i-1}(y-a)^{j-1}=$$
$$\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{b}_{i,j}[(x-a)^{i}(y-a)^{j-1}-(x-a)^{i-1}(y-a)^{j}]$$

故有

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{b}_{i,j}[(x-a)^{i}(y-a)^{j-1}-(x-a)^{i-1}(y-a)^{j}]=\\&\sum_{i,j=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)g^{(j)}(a)-f^{(j)}(a)g^{(i)}(a)}{i!\ j!}(x-a)^{i}(y-a)^{j}\end{aligned} \tag{8}$$

分别比较式(8)等号两边$(x-a)^{i}$,$(x-a)^{i}(y-a)^{j}$以及$(x-a)^{n}(y-a)^{j}$的系数可知

$$\tilde{b}_{i,1}=\frac{f^{(i)}(a)g(a)-f(a)g^{(i)}(a)}{i!},1\leqslant i\leqslant n$$

$$\tilde{b}_{i,j+1}-\tilde{b}_{i+1,j}=\frac{f^{(i)}(a)g^{(j)}(a)-f^{(j)}(a)g^{(i)}(a)}{i!\ j!},1\leqslant i,j\leqslant n-1$$

$$\tilde{b}_{n,j+1}=\frac{f^{(n)}(a)g^{(j)}(a)-f^{(j)}(a)g^{(n)}(a)}{n!\ j!},1\leqslant j\leqslant n-1$$

即得到式(5)(6)(7),故定理 3 成立,证毕.

4 实 例

在这一节,通过一个计算$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)$的简单实例,作为对前面定理的验证与说明.

例 1 给定多项式对

$$f(x)=1-4x+6x^2-4x^3=\beta_0^{(3)}(x)-\frac{1}{3}\beta_1^{(3)}(x)+\frac{1}{3}\beta_2^{(3)}(x)-\beta_3^{(3)}(x)$$

$$g(x)=1-6x+8x^2-2x^3=\beta_0^{(3)}(x)-\beta_1^{(3)}(x)-\frac{1}{3}\beta_2^{(3)}(x)+\beta_3^{(3)}(x)$$

由式(2)可知

$$b_{1,1}=2,b_{2,1}=1,b_{3,1}=-2$$

由式(3)可知

$$b_{1,2}=1,b_{2,2}=-\frac{3}{2},b_{1,3}=-2,b_{2,3}=2$$

由式(4)可知

$$b_{3,2}=2,b_{3,3}=0$$

故有

$$\boldsymbol{B}(f,g)=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&-\frac{3}{2}&2\\-2&2&0\end{pmatrix}$$

取 $a=1$,则有

$$f(1)=-1,\ f'(1)=-4,f''(1)=-12,\ f'''(1)=-24$$
$$g(1)=1,\ g'(1)=4,\ g''(1)=4,\ g'''(1)=-12$$

则由式(5)可知

$$\tilde{b}_{1,1}=0,\tilde{b}_{2,1}=-4,\tilde{b}_{3,1}=-6$$

由式(6)可知

$$\tilde{b}_{1,2}=-4,\tilde{b}_{2,2}=-22,\tilde{b}_{1,3}=-6,\tilde{b}_{2,3}=-24$$

由式(7)可知

$$\tilde{b}_{3,2}=-24,\tilde{b}_{3,3}=-20$$

故有

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)=\begin{pmatrix}0&-4&-6\\-4&-22&-24\\-6&-24&-20\end{pmatrix}\tag{9}$$

此外易知

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2^{-\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{K}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{K}_2^{-\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

故由式(1)可知

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&-\frac{3}{2}&2\\-2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4&-6\\-4&-22&-24\\-6&-24&-20\end{pmatrix} \tag{10}$$

不难发现,式(9)(10)两式的结果是完全相同的,这也验证了定理2与定理3是等价的.

5 小 结

将多项式与Taylor展开联系在一起,通过上面给出的简单实例,不仅可以反映出定理2用矩阵形式表示$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)$的合理性,而且容易看出定理3提供的计算$\widetilde{\boldsymbol{B}}(f,g)$中元素的这种具体算法是简便有效的.

参考文献:

[1] FUHRMANN P A.Polynomials Models and Algebraic Stability Criteria[M].New York:Springer,1982

[2] BARNETT S.Polynomials and Linear Control Systems[M].New York:Marcel Dekker Inc Press,1983

[3] 杨正宏.Bezout矩阵与多项式稳定性判别法的一种新证明[J].中国农业大学学报:自然科学版,1997,2(4):11-14

[4] 梁燕来,杨正宏,陈公宁.关于一般多项式基的Bezout矩阵的若干性质[J].北京师范大学学报:自然科学版,2003,39(1):14-20

[5] 刘冰,张羽乾.Bernstein-Bezoutian矩阵的若干性质[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(4):339-342

[6] 王金凤,孙彬.对称矩阵与Bezout矩阵之间关系的探讨[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(5):467-469

[7] 张战英,吴化璋.多项式Bezout矩阵束[J].合肥工业大学学报:自然科学版,2012,35(4):563-566

[8] 王萼芳,石生明.高等代数[M].3版.北京:高等教育出版社,2003

[9] 常庚哲,史济怀.数学分析教程(上册)[M].北京:高等教育出版社,2003

[10] LANCASTER P,TISMENETSKY M.The Theory of Matrices with Applications[M].2nd ed.New York:Academic,1985

[11] BINI D A,GEMIGNANI L .Bernstein-Bezoutian Matrices [J].Theoretical Computer Science,2004(315):319-333

A Class of Bezout Matrix Related to Taylor Expansion

CAO Meng

(School of Mathematical Science,Anhui University,Hefei 230601,China)

Abstract: According to polynomial Taylor expansion,this paper firstly gives the expression of Bezout matrix of the polynomials under the basis $\{1,x-\alpha,\cdots,(x-\alpha)^{n-1}\}$,then obtains a practical algorithm of the elements in this Bezout matrix and finally makes illustration by using an example.

Key words: Taylor expansion;classical Bezout Matrix;Bernstein-Bezout Matrix;algorithm

责任编辑:李翠薇