文章编号:1672-058X(2014)12-0005-06

非线性 PWM 反馈时滞系统的稳定性分析

阴文革, 韩化辉, 赵其领
(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘 要:在借鉴前辈学者们的研究基础上,探讨了非线性 PWM 反馈时滞系统的稳定性;基于 PWM(脉冲宽度调制)调控,利用改进的 Lyapunov-Krasovskii 泛函构造方法来构造 V 函数,然后通过使用线性矩阵不等式,得到了关于非线性 PWM 反馈时滞系统指数 p 次方稳定和指数 p 次方渐进稳定的判定.

关键词:时滞;PWM;Lyapunov-Krasovskii 泛函;指数 p 次方稳定;指数 p 次方渐进稳定
中图分类号:O231 **文献标志码**:A

PWM(脉冲宽度调制),是英文“Pulse Width Modulation”的缩写,它是利用微处理器的数字输出来对模拟电路进行控制的一种非常有效的技术.在动力系统的控制方法中,PWM 控制技术以其控制简单、灵活和动态响应好等优点,成为学者们研究的热点,被广泛地应用在工程系统、测量、信号处理、功率控制与变换的许多领域中.目前,已经建立许多方法来研究 PWM 反馈系统的稳定性,主要包括积分算子的正定核方法、频域法,以及由李雅普诺夫提出的第一方法和第二方法等.在这些方法中,李雅普诺夫方法由于其广泛的应用性,成为一种比较常见的系统稳定分析方法.现实中的系统往往存在着时间延迟的现象,这种现象称为时滞现象,也就是系统当前的状态明显地依赖于过去的状态.有些系统的时滞影响可以忽略,但大部分系统的时滞对其稳定性影响比较大.在自然界、工程技术、工业和社会生活领域,时滞广泛地存在着.作为影响系统稳定性的重要因素之一,对时滞现象的研究具有重要的理论意义和实践价值.

1 系统预备知识

数学上,PWM 是一种非线性控制输入函数,一般用 $u(t)$ 表示,主要有两种类型,在文中考虑的类型为

$$u(t)=m(e(t))=\begin{cases} M\operatorname{sgn}(e(kT)), & t\in[kT,kT+T_k) \\ 0, & t\in[kT+T_k,kT+T) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $T_k=\begin{cases}\beta|e(kT)|, & |e(kT)|\leqslant\dfrac{T}{\beta}\\ 0, & |e(kT)|>\dfrac{T}{\beta}\end{cases}$ 为脉冲宽度,$e(t)=r(t)-h(t)$,在此 M 是脉冲宽度振幅,M,β 为常数,$r(t)$ 为系统输入,$h(t)$ 为系统输出.

文章考虑的非线性 PWM 反馈时滞系统描述如式(2)

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)=Ax(t)\mathrm{d}t+A_\sigma x(t-\sigma)\mathrm{d}t+f(t,x(t),x(t-\sigma))+Bu(t)\mathrm{d}t \\ z(t)=C_1x(t)+C_2x(t-\sigma) \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:2014-04-10;**修回日期**:2014-05-06.

作者简介:阴文革(1967-),男,四川内江人,讲师,硕士,从事运筹学领域理论研究.

在该反馈系统中,$x\in\mathbf{R}^n$,$u,z\in\mathbf{R}$,u 是 PWM 输出,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2$ 是适当维数的矩阵,且 $\boldsymbol{B}$ 为脉冲宽度调控矩阵,σ 是时滞,且 $0<\sigma\leqslant T_k$,f 是非线性项.显然,有 $x_e=0$ 是系统的一个平衡点.

定义 1[1] 设(X,d)为可测空间,$X\subset\mathbf{R}^n$,$A\subset X$,$T\subset\mathbf{R}^+$.对任意给定的 $a\in A$(其中 a 为初始状态),$t_0\in T$,如果对所有 $\omega\in\Omega$,有 $x(t_0,\omega,a,t_0)=a$,其中 $T_{a,t_0}=[t_0,t_1)\cap T$,$t_1>t_0$,则称域 X 上的随机过程 $\{x(t,\omega,a,t_0),t\in T_{a,t_0}\}$ 为随机运动.

定义 2[1] 设 S 是域 X 上的随机运动族,如果 S 满足下述关系:$S\subset\{x(\cdot,\cdot,a,t_0):x(t_0,\omega,a,t_0)=a,\omega\in\Omega,a\in A,t_0\in T\}$,则称$\{T,X,A,S\}$为随机动力系统,在此简称为随机系统.

定义 3[2,3] 对于任给的一个泛函 V,其无穷小生成算子 $LV(x(t),t)$ 可以表示成

$$LV(x(t),t)=\lim_{\Delta\to0^+}\frac{1}{\Delta}[E(V(x(t+\Delta),t+\Delta)-V(x(t),t))]$$

定义 4[2,3] 随机系统称为指数 p 次方稳定的,如果对任意的初始条件,存在 $\alpha>0$ 和 $\beta\geqslant1$,使得下面的不等式(3)成立.特别,当 $p=2$ 时称为均方指数稳定.

$$E\|x(t)\|^p\leqslant\beta\exp(-\alpha t)\sup_{-d\leqslant\theta\leqslant0}E\|\xi(\theta)\|^p,\ \forall\, t\geqslant0$$

定义 5[2,3] 随机系统称为指数 p 次方渐进稳定的,如果对于任意的初始条件有 $\lim\limits_{t\to\infty}E\|x(t)\|^p=0$,特别,当 $p=2$ 时称为均方渐进稳定.

引理 1[5] 如果 n 阶线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax \tag{3}$$

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax$ 的特征根 λ_i 均不满足关系 $\lambda_i+\lambda_j=0(i,j=1,2,\cdots,n)$,则对任何定负(或定正)的对称矩阵 $\boldsymbol{C}$,均有唯一的二次型

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}x\ (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}) \tag{4}$$

使式(4)通过方程组(3)的全导数有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}x(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}) \tag{5}$$

且对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$.如果方程组(3)的特征根均具有负实部,则式(4)是定正(或定负)的;如果式(3)有正实部的特征根,则式(4)不是常正(或常负)的.

引理 2[2,3] 随机系统 $u(t)=Fy(t)$ 是均方稳定的,如果存在 Lyapunov.Krasovskii 泛函 $V(x(t),t)>0$,使其无穷小生成算子满足 $LV(x(t),t)<0$.

引理 3[10] 给定实数 α,β 及正定矩阵 $\boldsymbol{S}$,若 $\alpha>\beta$,则不等式

$$\left(\int_\beta^\alpha\omega(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\left(\int_\beta^\alpha\omega(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\leqslant(\alpha-\beta)\int_\beta^\alpha\omega(\sigma)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\omega(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

对于任意的向量函数 $\omega:[\beta,\alpha]\to\mathbf{R}^n$ 使得积分收敛都成立.

引理 4(舒尔补引理 a)[4] 对于 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_{11}&\boldsymbol{S}_{12}\\\boldsymbol{S}_{12}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{S}_{22}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{S}<0$ 与以下任一条件是等价的.

(1)$\boldsymbol{S}_{11}<0$, $\boldsymbol{S}_{22}-\boldsymbol{S}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{12}<0$;

(2)$\boldsymbol{S}_{22}<0$, $\boldsymbol{S}_{11}-\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{12}^{\mathrm{T}}<0$.

(舒尔补引理 b)[7] 对于 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_{11}&\boldsymbol{S}_{12}\\\boldsymbol{S}_{12}^{T}&\boldsymbol{S}_{22}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{S}>0\Leftrightarrow\boldsymbol{S}_{11}>0,\boldsymbol{S}_{22}-\boldsymbol{S}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{12}>0$.

引理 5(Gronwall 不等式)[12] 若 α 为实常数,$\beta(t)\geqslant0$,且 $\varphi(t)$ 是定义在$[a,b]$上的连续函数,满足 $\varphi(t)\leqslant a+\int_a^t\beta(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s$,$a\leqslant t\leqslant b$,则一定有

$$\varphi(t)\leqslant a\exp\left(\int_a^t\beta(s)\,\mathrm{d}s\right),a\leqslant t\leqslant b$$

2　主要结果和重要结论

对于如下随机时滞反馈系统(6)

$$\mathrm{d}x(t)=Ax(t)\,\mathrm{d}t+A_{\sigma}x(t-\sigma)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{B}p(t)\,\mathrm{d}t+g(t)\,\mathrm{d}W_t \tag{6}$$

系统(6)中,$g(t)\triangleq g(t,x(t),x(t-\sigma))$,且满足

$$\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(t)g(t)]\leqslant\|G_1(x(t))\|^2+\|G_2(x(t-\sigma))\|^2 \tag{7}$$

式(7)中,$\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2$ 为适合维数的实常矩阵.

根据引理 1[5],构造如式(8)的 Lyapunov.Krasovskii 泛函[6]

$$V(x(t),t)=\sum_{i=1}^{5}V_i(x(t),t) \tag{8}$$

其中

$$V_1(x(t),t)=x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}x(t) \tag{9}$$

$$V_2(x(t),t)=\int_{t-\sigma}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1x(s)\,\mathrm{d}s \tag{10}$$

$$V_3(x(t),t)=\int_{t-\sigma}^{t}\int_{s}^{t}x^{\mathrm{T}}(\gamma)\boldsymbol{R}_2x(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}s \tag{11}$$

$$V_4(x(t),t)=2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\int_{t-\sigma}^{t}x(s)\,\mathrm{d}s \tag{12}$$

$$V_5(x(t),t)=\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{0}x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}x(t+\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s \tag{13}$$

令参数集为 $\Phi:=\{\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q}\}$,$\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q}$ 为适当维数的 Hermite 矩阵.

命题 1[6]　如果参数集 Φ 满足下面的线性矩阵不等式式(14)

$$\boldsymbol{R}_1>0,\boldsymbol{R}_2>0,\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{Z}\\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} & \sigma^{-1}\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}>0 \tag{14}$$

则 Lyapunov.Krasovskii 泛函(8)是正定的.

定理 1[6]　对给定的标量 $\sigma>0$,时滞系统(6)是均方指数稳定的,如果存在标量 $\rho>0,\varepsilon>0$,参数集 Φ 满足命题 1,使得以下矩阵不等式式(15)(16)成立.

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_{11} & \boldsymbol{PA}_1-\boldsymbol{Z}+\varepsilon\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2 & \sigma\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}+\sigma\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{PB}\\ (\boldsymbol{PA}_1-\boldsymbol{Z}+\varepsilon\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2)^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}_1+\rho\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2+\varepsilon\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2 & \sigma\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}-\sigma\boldsymbol{Q} & 0\\ (\sigma\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}+\sigma\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}} & (\sigma\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}-\sigma Q)^{\mathrm{T}} & -h^{-1}\boldsymbol{R}_2 & \sigma\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & 0 & (\sigma\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} & -\varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{15}$$

$$P\leqslant\rho I \tag{16}$$

其中,$\boldsymbol{\Theta}_{11}=\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}_1+\sigma\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_1+\rho\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1$.

根据参考文献[6],可以知道对于任意的 $t>0$,

$$Ex(t)^2\leqslant\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\Delta}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\sup_{-\sigma\leqslant\theta\leqslant0}E\xi(\theta)^2\exp\left(-\frac{\mu t}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\right) \tag{17}$$

$\Delta=\lambda_{\max}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z})+\sigma+\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_1)+\sigma\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_2)+\sigma\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q})$,由前面给的条件可知 Δ 为常数.

现在,考虑非线性 PWM 反馈时滞系统(2),对系统进行变量代换,式(2)可表示为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=Ax(t)\,\mathrm{d}t+A_{\sigma}x(t-\sigma)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{B}u(t)\,\mathrm{d}t+f'(t)\,\mathrm{d}E_t\\ f'(t)=f(t,x(t),x(t-\sigma))\\ \mathrm{d}\boldsymbol{E}_t=\boldsymbol{E}\\ z(t)=\boldsymbol{C}_1x(t)+\boldsymbol{C}_2x(t-\sigma)\end{cases} \tag{18}$$

在系统(18)中,同样假设 $\mathrm{tr}[f'^{\mathrm{T}}(t)f'(t)] \leqslant \boldsymbol{G}_3 x(t)^2 + \boldsymbol{G}_4 x(t-\sigma)^2$, $\|\boldsymbol{B}u(t)\| \leqslant \left\|\boldsymbol{MH}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{sgn}(e(kt))\right\| \leqslant \boldsymbol{M}\|\lambda\boldsymbol{B}\|$, $-n\leqslant\lambda\leqslant n$, n 是 PWM 周期数.可见,采用合适的 PWM 方式,可以使 $0\leqslant\lambda\leqslant\varepsilon$,则

$$\|\boldsymbol{B}u(t)\| \leqslant \lambda\boldsymbol{M}\|\boldsymbol{B}\| \tag{19}$$

基于泛函(8),对构造进行改进,得到下面的 Lyapunov.Krasovskii 泛函式(20)

$$V(y(t),t) = \sum_{i=1}^{4} V_i(y(t),t) \tag{20}$$

在泛函式(20)中

$$V_1(y(t),t) = y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}y(t) \tag{21}$$

$$V_2(y(t),t) = \int_{t-\sigma}^{t} y^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}y(s)\,\mathrm{d}s \tag{22}$$

$$V_3(y(t),t) = 2y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\int_{t-\sigma}^{t} y(s)\,\mathrm{d}s \tag{23}$$

$$V_4(y(t),t) = \int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{0} y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}y(t+\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s \tag{24}$$

且 $\Phi_1 := \{\boldsymbol{P},\boldsymbol{R},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q}\}$, $\boldsymbol{R} > 0$, $y(t) = x^{p/2}(t)$, $p\in\boldsymbol{N}_+$, $\boldsymbol{P},\boldsymbol{R},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q}$ 是适当维数的 Hermite 矩阵.

令泛函(20)满足命题 1 中的条件,则根据命题 1 知,泛函(20)是正定的.

定理 2 对时滞 $\sigma>0$,系统(2)是指数 p 次方稳定的,如果存在标量 $\rho>0$, $\varepsilon>0$,参数集 Φ_1 使得以下矩阵不等式式(25)(26)成立.

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{11} & \boldsymbol{PA}_\sigma - \boldsymbol{Z} & \sigma\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} + \sigma\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{PB} \\ (\boldsymbol{PA}_\sigma - \boldsymbol{Z})^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R} + \rho\boldsymbol{G}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_4 & \sigma\boldsymbol{A}_\sigma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} - \sigma\boldsymbol{Q} & 0 \\ (\sigma\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} + \sigma Q)^{\mathrm{T}} & (\sigma\boldsymbol{A}_\sigma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} - \sigma\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}} & 0 & \sigma\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & 0 & (\sigma\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} & -\varepsilon\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$

$$\boldsymbol{P} \leqslant \rho\boldsymbol{I} \tag{26}$$

其中, $\boldsymbol{\Psi}_{11} = \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} + \lambda^2\varepsilon\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} + \rho\boldsymbol{G}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_3$.

证明 针对泛函(20),系统的无穷小微分算子为

$$\begin{aligned} LV_1(y(t),t) = {} & \lim_{\tau\to 0^+}\frac{1}{\tau}[\boldsymbol{E}(V_1(y(t+\tau),t+\tau) - V_1(y(t),t))] = \\ & 2y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}y(t) + \boldsymbol{A}_\sigma y(t-\sigma) + \boldsymbol{B}u(t)] + \mathrm{Trace}[f'^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}f'(t)] \leqslant \\ & 2y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}y(t) + \boldsymbol{A}_\sigma t(t-\sigma) + \boldsymbol{B}u(t)] + \boldsymbol{G}_3(y(t))^2 + \boldsymbol{G}_4(y(t))^2 \end{aligned}$$

$$LV_2(y(t),t) = y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}y(t) - y^{\mathrm{T}}(t-\sigma)\boldsymbol{R}y(t-\sigma)$$

$$LV_3(y(t),t) = 2[\boldsymbol{A}y(t) + \boldsymbol{A}_\sigma y(t-\sigma) + \boldsymbol{B}u(t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\int_{t-\sigma}^{t} y(s)\,\mathrm{d}s + 2y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}[y(t) - y(t-\sigma)]$$

$$LV_4(y(t),t) = 2y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\int_{t-\sigma}^{t} y(s)\,\mathrm{d}s + 2y^{\mathrm{T}}(t-\sigma)\boldsymbol{Q}\int_{t-\sigma}^{t} y(s)\,\mathrm{d}s$$

由式(19)可知, $\lambda^2\varepsilon\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} - \varepsilon\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}u^{\mathrm{T}}u\boldsymbol{B} \geqslant 0$.

综上可得

$$LV(y(t),t) = \sum_{i=1}^{4} LV_i(y(t),t) \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_{t-\sigma}^{t} \eta^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Psi}\eta(t,s)\,\mathrm{d}s \tag{27}$$

其中, $\eta^{\mathrm{T}}(t,s) = [y^{\mathrm{T}}(t) \quad y^{\mathrm{T}}(t-\sigma) \quad y^{\mathrm{T}}(s) \quad u'^{\mathrm{T}}(t)]$.

如果 $\boldsymbol{\Psi}<0$,则有 $LV(y(t),t)<0$.再由引理 4(舒尔补引理 a)可知,存在一个标量 $\mu>0$,使得如下不等式(28)成立.

$$LV(y(t),t) \leqslant -\mu\|y(t)\|^2 \tag{28}$$

然后由 Dynkin 公式[8]可以得到

$$\boldsymbol{E}V(y(t),t)=\boldsymbol{E}V(y(0),0)+\boldsymbol{E}\int_0^t LV(y(s),s)\,\mathrm{d}s$$

$$V_2(y(t),t)\leqslant\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})\int_{-\sigma}^0\|y(t+\theta)\|^2\mathrm{d}\theta$$

$$V_3(y(t),t)\leqslant\lambda_{\max}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z})\|y(t)\|^2+\sigma\int_{-\sigma}^0\|y(t+\theta)\|^2\mathrm{d}\theta$$

$$V_4(y(t),t)\leqslant\sigma\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q})\int_{-\sigma}^0\|y(t+\theta)\|^2\mathrm{d}\theta$$

则

$$\boldsymbol{E}V(y(0),0)\leqslant(\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\nabla)\sup_{-\sigma\leqslant\theta\leqslant0}\boldsymbol{E}\|\xi(\theta)\|^2 \tag{29}$$

$$\boldsymbol{E}V(y(t),t)\geqslant\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{E}\|y(t)\|^2 \tag{30}$$

$$\nabla=\lambda_{\max}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z})+\sigma+\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})+\sigma\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q})$$

由引理 5(Gronwell 不等式),可得

$$\boldsymbol{E}\|y(t)\|^2=\boldsymbol{E}\|x(t)^{p/2}\|^2=\boldsymbol{E}\|x(t)\|^p\leqslant\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\nabla}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\sup_{-\sigma\leqslant\theta\leqslant0}\boldsymbol{E}\|\xi(\theta)\|^2\exp\left(-\frac{\mu t}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\right) \tag{31}$$

$$\boldsymbol{E}\|x(t)\|^p\leqslant\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\nabla}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\sup_{-\sigma\leqslant\theta\leqslant0}\boldsymbol{E}\|\zeta(\theta)\|^p\exp\left(-\frac{\mu t}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\right),\zeta(\theta)=(\xi(\theta))^{p/2} \tag{32}$$

由定义 4 可知,系统(2)是指数 p 次方稳定的.

定理 3　满足定理 2 的非线性 PWM 反馈时滞系统是指数 p 次方渐进稳定的.

证明　对于满足定理 2 的系统,由上面的证明过程得

$$\boldsymbol{E}\|x(t)\|^p\leqslant\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\nabla}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\sup_{-\sigma\leqslant\theta\leqslant0}\boldsymbol{E}\|\zeta(\theta)\|^p\exp\left(-\frac{\mu t}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\right) \tag{33}$$

在式(33)中,$\lambda_{\max}(p)$,$\lambda_{\min}(p)$,∇,$\sup\boldsymbol{E}\|\zeta(\theta)\|^p$,$\mu$ 均为常数,式(33)可化简为

$$\boldsymbol{E}\|x(t)\|^p\leqslant K_1K_2\exp(-K_3t),K_1,K_2,K_3\text{ 为常数} \tag{34}$$

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{E}\|x(t)\|^p\leqslant\lim_{t\to\infty}K_1K_2\exp(-K_3t)=0 \tag{35}$$

根据定义 5,系统(2)是指数 p 次方渐进稳定的.

接下来,对泛函(20)的参数集进行讨论.

由于式(20)的参数集要满足 $\boldsymbol{R}>0$, $\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{Z}\\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} & \sigma^{-1}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}>0$,根据引理 4(舒尔补引理 b)可知

$$\boldsymbol{P}>0,\sigma^{-1}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}Z>0$$

从而得出对矩阵 P 的估计

$$\boldsymbol{P}>0\cap\boldsymbol{P}<(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})^{-1}(\sigma^{-1}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Z}^{-1} \tag{36}$$

再联系系统(2),系统中只有脉冲宽度调控矩阵 $\boldsymbol{B}$ 较易人为控制,在此不妨令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,且让 $\boldsymbol{B}$ 满足式(36),然后可得到如下的系统稳定性定理 4.

定理 4　对时滞 $\sigma>0$,非线性 PWM 反馈时滞系统(2)是指数 p 次方稳定且是指数 p 次方渐进稳定的,如果存在标量 $\rho>0$,$\varepsilon>0$,参数集 Φ_1 使得以下矩阵不等式(37)(38)成立.

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_{11} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_\sigma-\boldsymbol{Z} & \sigma\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}+\sigma\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\\ (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_\sigma+\boldsymbol{Z})^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{G}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_4 & \sigma\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}-\sigma\boldsymbol{Q} & 0\\ (\sigma\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}+\sigma\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}} & (\sigma\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}-\sigma\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}} & 0 & \sigma\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} & 0 & (\sigma\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} & -\varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{37}$$

$$\boldsymbol{H}\leqslant\rho\boldsymbol{I} \tag{38}$$

其中,$\boldsymbol{\Psi}_{11}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}+\lambda^2\varepsilon\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\rho\boldsymbol{G}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_3$.

证明　根据上面定理 2 和定理 3 可推出.

可见令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 后,使系统稳定需要选取的参数矩阵只有 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q}$.这样,解决过程变得更为简便、容易,且在现实中更方便实现.

3 小　结

研究了非线性 PWM 反馈时滞系统,通过引入新的变量进行系统变换,构造改进的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,结合线性矩阵不等式,得到了系统指数 p 次方稳定和指数 p 次方渐进稳定的判别,并尝试给出了现实中的稳定性解决方法,从而使文章更具优越性和现实意义.

参考文献:

[1]茆诗松,程依明,濮晓龙.概率论与数理统计教程[M].北京:高等教育出版社,2005

[2] MAO X.Stochastic Differential Equations and Their Applications[M].Horwood,Chichester,England,1997

[3] KSENDAL B.Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications[M].New York: Springer-Verlag,2003

[4] 黄卫红.矩阵 Schur 补的性质及其应用[D].南京:南京信息工程大学,2008

[5] 王高雄,周之铭,朱思铭,等.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,2006

[6] 钱伟.时滞系统若干问题的研究[D].杭州:浙江大学,2009

[7] 王松桂,杨振海.广义逆矩阵及其应用[M].北京: 北京工业大学出版社,1996

[8] Li C J, Li C d, LIAO X F, etal. Impulsive Effects on Stability of High-order BAM Neural Networks with Time Delays[J]. Neurocomputing,2011,74(10): 1541-1550

[9] Li C J, Li C D, HUANG T W. Exponential Stability of Impulsive High-order Hopfield-type Neural Networks with Delays and Reaction-diffusion[J].International Journal of Computer Mathematics,2011,88(15): 3150-3162

[10] GU K.An Integral Inequality in the Stability Problem of Time-delay Systems[R].Proceedings of IEEE Conference on Deeision and Control,2000(3): 2805-2810

[11] Li C J,GAO D Y,LIU C,etal,Impulsive Control for Synchronizing Delayed Discrete Complex Networks with Switching Topology [J].Neural Computing and Applications,2014,24(1): 59-68

[12] YE H P,GAO J M,DING Y S.A Generalized Gronwall Inequality and Its Application to A Fractional Differential Equation[J]. Journal of Mathematical analysis and applications,2006(7): 1075-1081

[13] 李传东,廖晓峰,黄延文,等.非线性系统的不连续控制[M].北京:科学出版社,2013

[14] 侯莉,张高民,王宣战.一类不确定奇异时滞系统的鲁棒方差控制[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2013,30(9): 39-42

Analysis of the Stability for Nonlinear PWM Feedback Time-delay System

YIN Wen-ge, HAN Hua-hui, ZHAO Qi-ling

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Based on the previous researches, this paper discusses the stability of nonlinear PWM(Pulse Width Modulation)feedback time-delay system, uses the improved Lyapunov-Krasovskii functional construction method to construct V function, and then obtains the discrimination on pth moment exponential stability and pth moment exponential asymptotic stability of nonlinear PWM feedback time-delay system by using linear matrix inequalities.

Key words:time-delay; PWM; Lyapunov-Krasovskii function; pth moment exponential stability; pth moment exponential asymptotic stability

责任编辑:李翠薇