文章编号:1672-058X(2014)11-0033-02

一类广义 Busemann-Petty 问题的稳定性

冯 伟

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:主要确立了广义 Busemann-Petty 问题的稳定性;结果涉及了维数限制上的广义 Busemann-Petty 问题的稳定性以及与广义截面体类结构相关联的 Busemann-Petty 问题的稳定性;细化并蕴含了 Koldobsky 和马丹所给出的广义 Busemann-Petty 问题的稳定性结果,且为进一步深化相关的研究提供了启示.

关键词:稳定性;广义 Busemann-Petty 问题;对偶混合体积;i 维拉登变换

中图分类号:O189 **文献标志码:**A

Busemann-Petty 问题是凸几何学中著名的经典难题.它自提出便先后吸引了包括 Fields 奖获得者 J.Bourgain在内的诸多优秀数学家投身到其研究之中.为了解决这一经典问题,数学家们极大地丰富了凸几何学的内容,并发展了许多新的凸几何学研究的方法.

1956 年,著名几何学家 H.Busemann 和 C.M.Petty 提出 Busemann-Petty 问题[1]:如果对于 $\mathbf{R}^n$ 中的两个关于原点中心对称的凸体 K,L,使得对于单位球面 S^{n-1}上所有单位向量 ξ,都有

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\xi^{\perp})\leqslant\mathrm{vol}_{n-1}(L\cap\xi^{\perp})$$

成立,其中 $\mathrm{vol}_{n-1}(\cdot)$表示 n 维体积,$\xi^{\perp}=\{x\in\mathbf{R}^n:<x,\xi>=0\}$表示正交于 ξ 方向上的中心超平面,那么是否 $\mathrm{vol}_n(K)\leqslant\mathrm{vol}_n(L)$必然成立?

1975 年,D.G.Larman 和 C.A.Rogers[2]证明了当 $n\geqslant12$ 时答案为否定的;1989 年,K.Ball[3]证明了当 $n\geqslant10$ 时答案为否定的;1990 年,A.Giannopoulos[4]和 G.Bourgain[5]证明了当 $n\geqslant7$ 时答案为否定的;1992 年,M.Papadimitrackis[6]证明了当 $n\geqslant5$ 时答案为否定的.

这个问题彻底被解决其实归功于 E.Lutwak[7]的卓著工作—揭示截面体和 Busemann-Petty 问题之间存在重要的联系;基于这种联系,1994 年,R.Gardner[8]证明了当 $n=3$ 时 Busemann-Petty 问题的答案是肯定的;1999 年,张高勇[9]证明了当 $n=4$ 时 Busemann-Petty 问题的答案是肯定的.

1999 年,R.Gardner,A.Koldobsky 以及 T.Schlumprecht[10]用 Fourier 变换给出了所有维数的 Busemann-Petty 问题的一个一致解;F.Barthe,M.Fradelicz 和 B.Maurey[11]给出了这个一致解的重要的证明;然后就出现了许多与 Busemann-Petty 问题相关联的有意义的结果.1996 年,张高勇[12]首先研究了 Busemann-Petty 问题的一个几何推广:如果 $\mathbf{R}^n$ 中两个关于原点中心对称的凸体 K 和 L 满足

$$\mathrm{vol}_i(K\cap\xi)\leqslant\mathrm{vol}_i(L\cap\xi),\ \forall\xi\in G(n,i)$$

其中 $G(n,i)$表示在 $\mathbf{R}^n$ 中的 i 维子空间的格拉斯曼流形,那么是否 $\mathrm{vol}_n(K)\leqslant\mathrm{vol}_n(L)$一定成立?

这个问题一般被称作广义 Busemann-Petty 问题.当 $i=n-1$ 时,这个问题就是上述所提到的 Busemann-Petty 问题.已经证明了当 $3<i<n$ 时广义 Buseman-Petty 问题的解是否定的,但是当 $n>3,i=2,3$ 时的广义

收稿日期:2014-03-05;**修回日期:**2014-05-10.

作者简介:冯伟(1986-),男,河南信阳人,硕士研究生,从事几何分析研究.

Busemann-Petty 问题的解仍然是公开的($i=1$ 时是明显成立的).

此处研究了广义 Busemann-Petty 问题一般的稳定性,结果或许对于广义 Busemann-Petty 问题的公开情形提供了启示.以下是主要结果及推论.

定理 1 如果 $\mathbf{R}^n$ 上的一个(i,k)截面体 K 和一个星体 L,对于任意的 $\xi\in G(n,i)$ 都满足 $\mathrm{vol}_i(K\cap\xi)\leqslant\mathrm{vol}_i(L\cap\xi)+\varepsilon$,那么对于任意的 $\eta\in G(n,i+k)$ 就有

$$\mathrm{vol}_{i+k}(K\cap\eta)^{\frac{i}{i+k}}\leqslant\mathrm{vol}_{i+k}(L\cap\eta)^{\frac{i}{i+k}}+\varepsilon\frac{((\omega_{i+k})^{\frac{i}{i+k}}}{\omega_i}$$

在定理 1 中,$k=n-i$ 时的结果就是 Koldobsky 和马丹在文献[13]中确立的结果.

推论 1 如果 $\mathbf{R}^4$ 上的一个 2 维截面体 K 以及一个星体 L,对于任意的 $\xi\in G(4,2)$ 满足

$$\mathrm{vol}_2(K\cap\xi)\leqslant\mathrm{vol}_2(L\cap\xi)+\varepsilon\tag{1}$$

那么就有

$$\mathrm{vol}_4(K)^{\frac{1}{2}}\leqslant\mathrm{vol}_4(L)^{\frac{1}{2}}+0.707\,1\varepsilon\tag{2}$$

为了阐述定理 2,定义了 $\mathbf{R}^n$ 中的一个星体 K 的 i 对偶均值积分 $\widetilde{W}_i(K)=\dfrac{1}{\mathrm{n}}\int_{S^{n-1}}\rho_K(u)^{n-i}\mathrm{d}u$.

定理 2 $D(n-i,r)=\{j\in\mathbf{N}\cap\{0\}:j<n-i,\exists\,\mathrm{m}\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ j=n-i-mr\}$.对于任意的正整数 r 满足 $r\leqslant n-i$,如果 $\mathbf{R}^n$ 中的一个$(n-r)$维截面体 K 和一个星体 L,对于任意的 $\xi\in G(n,i)$,满足

$$\mathrm{vol}_i(K\cap\xi)\leqslant\mathrm{vol}_i(L\cap\xi)+\varepsilon\tag{3}$$

那么对于任意的 $j\in D(n-i,r)$,就有

$$\widetilde{W}(K)^{\frac{i}{n-j}}\leqslant\frac{\widetilde{W}(L)^{\frac{i}{n-j}}+\varepsilon\omega_{\mathrm{n}}^{\frac{i}{n-j}}}{\omega_i}$$

当 $j=0$ 以及 $r=n-i$ 时,定理 2 就得到 Koldobsky 和马丹在文献[13]中的结果.

推论 2 如果 $\mathbf{R}^4$ 中的一个 3 维截面体 K 和一个星体 L,对于任意的 $\xi\in G(4,3)$,满足:

$$\mathrm{vol}_3(K\cap\xi)\leqslant\mathrm{vol}_3(L\cap\xi)+\varepsilon$$

那么就有

$$\mathrm{vol}_4(K)^{\frac{3}{4}}\leqslant\mathrm{vol}_4(L)^{\frac{3}{4}}+0.790\,4\varepsilon\tag{4}$$

回顾到式(1)和式(3)的条件中,和 ε 相乘的系数都是 1,但是在式(2)和式(4)中,和 ε 相乘的系数却都是小于 1 的.因此,推论 1 和推论 2 实际上从直观上启示了张高勇的广义 Busemann-Petty 问题的公开情形或许是有正解的.

参考文献:

[1] BUSEMANN H, PETTY C M. Problem on Convex Bodies[J].Math Scand,1956(4): 88-94

[2] LARMAN D G, ROGERS C A. The Existence of a Centrally Symmetric Convex Body With Central Sections That Are Unexpectedly Small[J]. Mathematika,1975(22): 164-175

[3] BALL K. Some Remarks on the Geometry of Convex Sets, Geometric Aspects of Functional Analysis[J]. Ann Math, 1988(17): 224-231

[4] GIANNOPOULOS A A. A Note on a Problem of H. Busemann and C. M. Petty Concerning Sections of Symmetric Convex Bodies [J]. Mathematika, 1990(37):239-244

[5] BOURGAIN J. On the Busemann-Petty Problem for Perturbations of The Ball[J].Geom Funct Anal, 1991(1):1-13

[6] PAPADIMITRAKIS M. On the Busemann-Petty Problem about Convex, Centrally Symmetric Bodies in $\mathbf{R}^n$[J]. Mathematika, 1992(39): 258-266

(下转第 44 页)