文章编号:1672-058X(2014)11-0029-04

广义结式矩阵核维数的证明*

杨翠芝

(安徽大学 数学科学学院,合肥 230601)

摘　要:广义结式矩阵核的维数对于研究结式矩阵有重要的意义,因此文章利用广义结式矩阵与多项式之间的关系,给出并证明了多项式的广义结式矩阵核的维数.

关键词:多项式;结式矩阵;维数

中图分类号:O151　　**文献标志码:**A

结式矩阵的研究开始于 19 世纪中期,因其在线性系统、稳定性理论、控制性理论等问题中都起着重要作用,因此备受关注.文献[1]讨论了经典的 Sylvester 结式矩阵与 Bezout 矩阵的关系,并给出了经典的 Sylvester 结式矩阵的算子表示;文献[2]讨论了两个多项式的最大公因式与 Sylvester 结式矩阵的联系,给出了两个多项式的最大公因式的次数与 Sylvester 结式矩阵秩之间的等式关系.此处在文献[2]的基础上讨论广义结式矩阵与多项式之间的关系,给出并证明了两个多项式的广义结式矩阵核维数.

令 $X=(x_i)_{i=0}^{n-1}\in F^n$,$F^n$ 表示一个 n 维列向量空间,多项式 $X(t)=\sum_{i=0}^{n-1}x_kt^k\in F^n[t]$,$F^n[t]$表示以 t 为变量,次数小于 n 的多项式空间,$X(t)$ 称为 X 的生成多项式.令 $\boldsymbol{J}_n=\begin{bmatrix}0 & & 1\\ & \ddots & \\ 1 & & 0\end{bmatrix}$是一个反转矩阵,则有 $X^J=\boldsymbol{J}_nX$.

设 $a(\lambda)=\sum_{i=0}^{l}a_i\lambda^i$,$a_l\neq0$,$b(\lambda)=\sum_{i=0}^{m}b_i\lambda^i$,$b_m\neq0$ 则关于 $a(\lambda)$,$b(\lambda)$ 的经典 Sylvester 结式矩阵为

$$\boldsymbol{R}(a,b)=\underbrace{\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & \cdots & a_l & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_l & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_l\\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m\end{bmatrix}}_{m+n}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}m\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}l\end{matrix}$$

很显然,两个多项式的经典 Sylvester 结式矩阵是$(m+n)\times(m+n)$的方阵.

令 $U(t)\in F^{n+1}[t]$,$V(t)\in F^{m+1}[t]$,设 $W(t)$ 为 $U(t)$,$V(t)$ 的最大公因式,即 $W(t)=\gcd(U(t),V(t))$,设 $\boldsymbol{v}_\infty=\min\{n-\deg U(t),m-\deg V(t)\}$,$\boldsymbol{v}=\deg W(t)+\boldsymbol{v}_\infty$,由于 $W(t)$ 为 $U(t)$,$V(t)$ 公因式,所以存在 $U_0(t)$,$V_0(t)$,使得 $U(t)=W(t)U_0(t)$,$V(t)=W(t)V_0(t)$,且 $U_0(t)$,$V_0(t)$ 是互素的.事实上,$\deg U_0(t)=\deg U(t)-\deg W(t)\leqslant n-\boldsymbol{v}_\infty-\deg W(t)=n-(\boldsymbol{v}-\deg W(t))-\deg W(t)=n-\boldsymbol{v}$,当 $\boldsymbol{v}_\infty=n-\deg U(t)$时取等号;同理,$\deg V_0(t)\leqslant$

收稿日期:2014-03-05;**修回日期:**2014-03-26.

* **基金项目:**安徽省自然科学基金资助项目(1208085MA02).

作者简介:杨翠芝(1986-),女,河南驻马店人,硕士研究生,从事矩阵论与算子理论研究.

$m-\upsilon$,当 $\upsilon_\infty=n-\deg V(t)$ 取等号.所以 $U_0(t)\in F^{n+1-\upsilon}[t]$,$V_0(t)\in F^{m+1-\upsilon}[t]$,并且 $\deg U_0(t)=n-\upsilon$,$\deg V_0(t)=m-\upsilon$ 中至少有一个等式成立.特别地,当 F 是一个代数闭域,设多项式 $W(t)$ 的根为 $t_0,t_1,\cdots,t_k$,其重数为 $\upsilon_0,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_k$,则 $(t-t_i)^{\upsilon_i}$ 为 $U(t)$,$V(t)$ 的公因子,所以 $\deg W(t)=\sum_{i=0}^{k}\upsilon_i$,故 $\upsilon=\sum_{i=0}^{k}\upsilon_i+\upsilon_\infty$.

定义 1 设 F 为代数闭域,令 $U\in F^{n+1}$,$V\in F^{m+1}$,$p\leqslant\min\{m,n\}$,假设 $m,n\geqslant 0$,则广义结式矩阵定义为

$$\mathrm{Res}^p(U,V)=\underbrace{\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n & & & 0\\ & u_0 & u_1 & \cdots & u_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & u_0 & u_1 & \cdots & u_n\\ v_0 & v_1 & \cdots & v_m & & & 0\\ & v_0 & v_1 & \cdots & v_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & v_0 & v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix}}_{m+n-p}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-p\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-p\end{matrix}$$

特别地,当 $p=0$ 时,$\mathrm{Res}^p(U,V)$ 称为经典的 Sylvester 结式矩阵.

引理 1[2] W 为一个向量,F^n 为一个向量空间,设 $X\in F^m$,$W=(w_i)_{i=0}^{n}\in F^{n+1}$,令

$$\boldsymbol{D}_{m,m+n}(W)=\begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \cdots & w_n & & & 0\\ & w_0 & w_1 & \cdots & w_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & w_0 & w_1 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$$

则 $(\boldsymbol{D}_{m,m+n}(W)^{\mathrm{T}}X)(t)=W(t)X(t)$.

引理 2 令 $q\in F^{m+n}$,$w\in F^{n+1}$,$p\in F^m$,那么 $\boldsymbol{D}_{m,n+m}(w)q^J=p^J$,当且仅当存在 $p_1,p_2\in F^n$ 使得 $w(t)q(t)=p_1(t)+p(t)t^n+t^{m+n}p_2(t)$ 成立.

证明 由矩阵的运算有等式(1)成立:

$$\boldsymbol{D}_{m,n+m}(w)=[0\quad I_m\quad 0]\boldsymbol{D}_{m+n,m+2n}(w^J)^{\mathrm{T}}=[0\quad \boldsymbol{J}_m\quad 0]\boldsymbol{D}_{m+n,m+2n}(w)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{m+n} \tag{1}$$

则

$$\boldsymbol{D}_{m,n+m}(w)q^J=[0\quad \boldsymbol{J}_m\quad 0]\boldsymbol{D}_{m+n,m+2n}(w^{\mathrm{T}})\boldsymbol{J}_{m+n}q^J=[0\quad \boldsymbol{J}_m\quad 0]\boldsymbol{D}_{m+n,m+2n}(w)^{\mathrm{T}}q=p^J \tag{2}$$

将式(2)最后一个等式两边同乘以 J_m,即

$$\boldsymbol{J}_m[0\quad \boldsymbol{J}_m\quad 0]\boldsymbol{D}_{m+n,m+2n}(w)^{\mathrm{T}}q=\boldsymbol{J}_m p^J\Rightarrow[0\quad \boldsymbol{J}_m\quad 0]\boldsymbol{D}_{m+n,m+2n}(w)^J q=p$$

故存在 $p_1,p_2\in F^n$,使得 $\boldsymbol{D}_{m,n+m}(w)^J q=\begin{bmatrix}p_1\\ p\\ p_2\end{bmatrix}$,又因为 $q\in F^{m+n}$,所以由引理 1,有

$$w(t)q(t)=(\boldsymbol{D}_{m,n+m}(w)^J q)(t)=\begin{bmatrix}p_1\\ p\\ p_2\end{bmatrix}(t)=p_1(t)+p(t)t^n+t^{m+n}p_2(t)$$

定理 1 令 $U\in F^{n+1}$,$V\in F^{m+1}$,$w\in F^{\upsilon+1}$,其中 $W(t)$ 为 $U(t)$,$V(t)$ 最大公因式,且有 $\dfrac{u(t)}{u_0(t)}=\dfrac{v(t)}{v_0(t)}=w(t)$,则 $\ker\boldsymbol{D}_{n+m-p-\upsilon,n+m-p}(w)\subseteq\ker\mathrm{Res}^p(U,V)$.

证明 取 $q^J\in\ker D_{n+m-p-\upsilon,n+m-p}(w)$,则 $q\in F^{n+m-p}$,由引理 2,存在 $p_1,p_2\in F^{\upsilon}$ 使得

$$w(t)q(t)=p_1(t)+t^{m+n-p}p_2(t) \tag{3}$$

式(3)两边分别乘以 $U_0(t)$,$V_0(t)$ 得

$$u(t)q(t)=u_0(t)p_1(t)+t^{n+m-p}u_0(t)p_2(t),v(t)q(t)=v_0(t)p_1(t)+t^{n+m-p}v_0(t)p_2(t)$$

由于 $\deg U_0(t)\leqslant n-\upsilon,\deg V_0(t)\leqslant m-\upsilon$，由引理 2 得

$$q^J\in\ker D_{m-p,\,n+m-p}(u),q^J\in\ker D_{n-p,n+m-p}(v)$$

故 $q^J\in\ker\begin{bmatrix}D_{m-p,m+n-p}(U)\\D_{n-p,m+n-p}(V)\end{bmatrix}=\ker \mathrm{Res}^p(U,V)$，即有

$$1D_{n+m-p-\upsilon,n+m-p}(w)\subseteq\ker \mathrm{Res}^p(U,V)$$

定理 2　设 $\mathrm{Res}^p(U,V)$ 是给定多项式 $U(t),V(t)$ 的广义结式矩阵，则

(i) $\dim\ker(\mathrm{Res}^p(U,V))^{\mathrm{T}}=\max\{0,\upsilon-p\}$；

(ii) $\dim\ker \mathrm{Res}^p(U,V)=\max\{\upsilon,p\}$.

证明

(i)

$$\left(\mathrm{Res}^p(U,V)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)(t)=\begin{bmatrix}u_0&&&0&v_0&&&0\\u_1&u_0&&&v_1&v_0&&\\\vdots&u_1&\ddots&&\vdots&v_1&\ddots&\\u_n&\vdots&\ddots&u_0&v_n&\vdots&\ddots&v_0\\&u_n&\ddots&u_1&&v_n&\ddots&v_1\\&&\ddots&\vdots&&&\ddots&\vdots\\0&&&u_n&0&&&v_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_{m-p-1}\\y_0\\y_1\\\vdots\\y_{n-p-1}\end{bmatrix}(t)=0 \tag{4}$$

由引理 1，式(4)转化成

$$U(t)X(t)+V(t)Y(t)=0,X(t)\in F^{m-p}[t],Y(t)\in F^{n-p}[t] \tag{5}$$

则

$$W(t)(U_0(t)X(t)+V_0(t)Y(t))=0\Rightarrow(U_0(t)X(t)+V_0(t)Y(t)=0\Rightarrow U_0(t)X(t)=-V_0(t)Y(t) \tag{6}$$

因为 $U_0(t)\mid U_0(t)X(t)$，所以 $U_0(t)\mid -V_0(t)Y(t)$，因为 $u_0(t)$ 与 $V_0(t)$ 互素，所以 $U_0(t)\mid Y(t)$. 设 $Y(t)=U_0(t)P(t)$，由于 $U_0(t)\in F^{n-\upsilon+1}[t],Y(t)\in F^{n-p}[t]$，所以

1）当 $\upsilon>p$ 时，$\deg U_0(t)>\deg Y(t)$，所以 $Y(t)=0$，由式(6)有 $X(t)=0$，即 $\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=0$，从而 $\dim\ker(\mathrm{Res}^p(U,V))^{\mathrm{T}}=0$；

2）当 $\upsilon<p$ 时，$P(t)\in F^{\upsilon-p}$，令 $P(t)$ 分别取 $1,t,t^2,\cdots,t^{\upsilon-p-1}$，对应得到 Y 的一组向量

$$\underbrace{\begin{bmatrix}u'_0\\u'_1\\\vdots\\u'_{n-\upsilon}\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\u'_0\\\vdots\\u'_{n-\upsilon}\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\u'_0\\u'_1\\\vdots\\u'_{n-\upsilon}\end{bmatrix}}_{\upsilon-p}\quad\text{（其中 }U_0(t)\text{ 是}\begin{bmatrix}u'_0\\u'\\\vdots\\u'_{n-\upsilon}\end{bmatrix}\text{生成的多项式）} \tag{7}$$

显然这 $\upsilon-p$ 个向量是线性无关的. 由式(6)可知，当 $Y(t)$ 取定后，$X(t)$ 也相应地确定了，随之 $\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$ 也相应确定. 故当 Y 取定式(7)这样一组向量后，$\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$ 有对应 $\upsilon-p$ 个线性无关的向量，所以 $\dim\ker(\mathrm{Res}^p(U,V))^{\mathrm{T}}=\upsilon-p$. 所以由 1)，2) 可知，$\dim\ker(\mathrm{Res}^p(U,V))^{\mathrm{T}}=\max\{0,\upsilon-p\}$.

(ii)
$$(\mathrm{Res}^p(U,V)X)(t)=\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n & & & 0 \\ & u_0 & u_1 & \cdots & u_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_m & & & 0 \\ & v_0 & v_1 & \cdots & v_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & v_0 & v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m+n-p-1} \end{bmatrix}(t)=0 \tag{3}$$

1) 当 $\upsilon \geqslant p$ 时,由(i)可知 $\dim\ker(\mathrm{Res}^p(U,V))^{\mathrm{T}}=\upsilon-p$,所以

$$\operatorname{rank}\mathrm{Res}^p(U,V)^{\mathrm{T}}=m+n-2p-(\upsilon-p)=m+n-p-\upsilon$$

$$\dim\ker\mathrm{Res}^p(U,V)=m+n-p-\operatorname{rank}\mathrm{Res}^p(U,V)=m+n-p-\operatorname{rank}(\mathrm{Res}^p(U,V))^{\mathrm{T}}=\upsilon$$

2) 当 $\upsilon<p$ 时,由(i)知,$\dim\ker(\mathrm{Res}^p(U,V))^{\mathrm{T}}=0$,则

$$\operatorname{rank}(\mathrm{Res}^p(U,V))^{\mathrm{T}}=m+n-2p$$

$$\dim\ker\mathrm{Res}^p(U,V)=m+n-p-\operatorname{rank}\mathrm{Res}^p(U,V)=m+n-p-\operatorname{rank}(\mathrm{Res}^p(U,V))^{\mathrm{T}}=p$$

综合(ii)的 1),2),知 $\dim\ker\mathrm{Res}^p(U,V)=\max\{\upsilon,p\}$.

参考文献:

[1] FUHRMANN P A. A Polynomial Approach to Linear Algebra [M]. New York:Sprigner-Verlag,1996

[2] BANETT S. Polynomials and Linear Control Systems[M]. New-York:Marcel Dekker ,1983

[3] 刘冰,张羽乾. Bernstein-Bezoutian 矩阵的若干性质[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(4):339-442

[4] 王其林.关于"正交矩阵的特征多项式及特征根"的注[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011(4):154-155

[5] 陈公宁.矩阵理论与应用[M]. 北京:高等教育出版社,1990

[6] CHEN G N, ANG Z H. Bezoutian Representation via Vandermonde Matrices[J]. Linear Algebra Appl,1993(186):35-46

[7] HEINING G , ALVAREZ M. On Bezoution Reduction with Vandermonde Matrices and Operators [J]. Operator Theory, 1984 (13):100-121

[8] FUHRMANN P A. On Bezoutian Vandermonde Matrices and the Lienard-Chipart Stability Criterion [J]. Linear Algebra Appl , 1989(120):25-33

The Proof for the Dimensions of the Kernel of Generalized Resultant Matrix

YANG Cui-zhi

(School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: The dimensions of the kernel of generalized resultant matrix are important to study the resultant matrix, as a result, this paper gives and proves the dimensions of the kernel of generalized resultant matrix of polynomials by using the relation between generalized resultant matrix and polynomials.

Key words:polynomial; resultant matrix; dimension

责任编辑:李翠薇