文章编号:1672-058X(2014)11-0017-06

相似于 Jordan 块的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有变换矩阵

蔡　吟, 王丽庆
(温州大学 数学与信息科学学院,浙江 温州 325035)

摘　要:任何非零矩阵都有 Jordan 标准型,且变换矩阵不唯一,整理出了相似于 Jordan 块的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 Jordan 标准化下的所有变换矩阵,并证明了其判定法则.

关键词:Jordan 块;相似;变换矩阵
中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A

北京大学数学系所著的"高等代数"[1]和李炯生的"线性代数"[2]都已经证明:对任意非零矩阵 $\boldsymbol{A}$,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{J}$,其中 $\boldsymbol{J}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型,并且这样的 $\boldsymbol{Q}$ 不唯一.而在张贤科的"高等代数学"中给出了如何求出一个非零矩阵 Jordan 标准化的变换矩阵的方法,但是没有说明如何求解所有的变换矩阵.事实上,对于一个一般的非零矩阵来说,要找到它 Jordan 标准化所对应的所有变换矩阵是复杂而困难的.此处主要探究与 n 阶 Jordan 块相似的矩阵,其 Jordan 标准化时所对应的变换矩阵的全体.

1　所有变换矩阵的探究和证明

首先"$\boldsymbol{Q}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 化的变换矩阵"的一个必要条件[3]:

设 $\boldsymbol{Q}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,且 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.由 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{J}$ 可知, $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{QJ}$,即$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})$,化简即有 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{QJ}$ 的一个等价条件:

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{j-1}\alpha_1=\alpha_j(j=2,3,\cdots,n),(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^n\alpha_1=0$$

定义 1　分别设

$$\alpha_{11}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\alpha_{21}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\alpha_{31}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\alpha_{n1}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

通过公式 $\alpha_{ij}=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{j-1}\alpha_{i1}$即可得到 n 组不同的 $\alpha_{i2},\alpha_{i3},\cdots,\alpha_{in}$,从而得到 n 个不同的 $\boldsymbol{P}_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in})(i=1,2,\cdots,n)$.定义这 n 个不同的 $\boldsymbol{P}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的基础矩阵(显然 $\boldsymbol{P}_i$ 满足 $\boldsymbol{AP}_i=\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{J}$ 的等价条件,即满足 $\boldsymbol{AP}_i=\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{J}$).

定理 1　$\boldsymbol{P}_i$ 的第 j 列(即 α_{ij})和$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{j-1}$的第 i 列相等($j=2,3,\cdots,n$).

证明

$$(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\cdots,\alpha_{nj})=((\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{j-1}\alpha_{11},(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{j-1}\alpha_{21},\cdots,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{j-1}\alpha_{n1})=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{j-1}\boldsymbol{E}\quad(1)$$

收稿日期:2014-04-20;**修回日期**:2014-05-06.

作者简介:蔡吟(1992-),男,浙江温州人,从事矩阵论研究.

比较左右两个矩阵的每一列,即可得原命题得证.

另外不难发现

$$\alpha_{in}=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\alpha_{i1}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{i1}$$

令

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{i1}=\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$$

当 $\alpha_{in}=(\neq)0$ 时,

$$0=\boldsymbol{Q}^{-1}0=(\neq)\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{in}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_{1i} \end{pmatrix} \Rightarrow b_{1i}=(\neq)0$$

也就是说 $b_{1i}=0$ 当且仅当 α_{in} 为零向量.

定理 2 基础矩阵 $\boldsymbol{P}_i$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{P}_i$ 的最后一列不为零向量($\alpha_{in}\neq 0$).

证明 当 $\alpha_{in}=0$ 时,$\boldsymbol{P}_i$ 显然不可逆;当 $\alpha_{in}\neq 0$ 时,如果能证明 $k_1\alpha_{i1}+\cdots+k_n\alpha_{in}=0$ 成立,当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时成立,那么 $\boldsymbol{P}_i$ 为可逆矩阵即可得证.

"⇐":显然成立.

"⇒":$0=\boldsymbol{Q}^{-1}0=\boldsymbol{Q}^{-1}(k_1\alpha_{i1}+k_2\alpha_{i2}+\cdots+k_n\alpha_{in})=$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}(k_1\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{i1}+k_2\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{i1}+\cdots+k_n\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{i1})=$$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n & k_{n-1} & \cdots & k_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{i1}=\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n & k_{n-1} & \cdots & k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$$

于是得到方程组

$$0=k_1b_{1i} \tag{2}$$

$$0=k_2b_{1i}+k_1b_{2i} \tag{3}$$

$$0=k_nb_{1i}+k_{n-1}b_{2i}+\cdots+k_1b_{ni} \tag{4}$$

结合式(2)与 $b_{1i}\neq 0$,可得 $k_1=0$,再结合式(3)又可得 $k_2=0$,综上,即可得 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$,从而原命题得证.

推论 1 $\boldsymbol{W}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的基础矩阵的线性组合时,$\boldsymbol{W}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{W}$ 的最后一列不为零向量.此命题的证明可以直接从定理 4 的证明过程中得出.

定理 3 任给一个 n 阶非零矩阵 $\boldsymbol{W}$,都存在且唯一存在 n 个常数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和非零 n 阶矩阵 $\boldsymbol{H}$(其中 $\boldsymbol{H}$ 的第一列为零向量),使得 $\boldsymbol{W}=t_1\boldsymbol{P}_1+t_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n+\boldsymbol{H}$ 成立.

证明 设 $\boldsymbol{W}$ 的第一列为$(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$,显然 $\boldsymbol{W}=t_1\boldsymbol{P}_1+t_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n+\boldsymbol{H}$ 当且仅当 $t_i=c_i(i=1,2,\cdots,n)$,$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{W}-(t_1\boldsymbol{P}_1+t_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n)$.

定理 4 $\boldsymbol{W}$ 为 $\boldsymbol{A}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 相似于 Jordan 块矩阵)的 Jordan 化的变换矩阵当且仅当 $\boldsymbol{W}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的基础矩阵的线性组合,且其系数 t_i 满足不等式 $\sum_{m=1}^{n}t_mb_{1m}\neq 0$(其中 b_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 中对应位置的元素).

证明 当 $\boldsymbol{W}$ 不为 $\boldsymbol{A}$ 的基础矩阵的线性组合时,存在 n 个常数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和非零 n 阶矩阵 $\boldsymbol{H}$(其中 $\boldsymbol{H}$ 的第一列为零向量),使得 $\boldsymbol{W}=t_1\boldsymbol{P}_1+t_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n+\boldsymbol{H}$ 成立.

$$\boldsymbol{AW}=\boldsymbol{A}(t_1\boldsymbol{P}_1+t_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n+H)=t_1\boldsymbol{AP}_1+t_2\boldsymbol{AP}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{AP}_n+\boldsymbol{AH}=$$

$$t_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{J}+t_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{J}+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{J}+\boldsymbol{AH}=(t_1\boldsymbol{P}_1+t_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n+H)\boldsymbol{J}+\boldsymbol{A}H-H\boldsymbol{J}=$$
$$\boldsymbol{WJ}+\boldsymbol{AH}-\boldsymbol{HJ}$$

由于 $\boldsymbol{H}$ 的第一列为零向量,且 $\boldsymbol{H}$ 为非零矩阵,因此 $\boldsymbol{AH}-\boldsymbol{HJ}\neq 0$,即 $\boldsymbol{W}$ 必然不是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 化的变换矩阵.

当 $\boldsymbol{W}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的基础矩阵的线性组合,即 $\boldsymbol{W}=t_1\boldsymbol{P}_1+t_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n$ 时,

$$\boldsymbol{AW}=\boldsymbol{A}(t_1\boldsymbol{P}_1+t_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n)=t_1\boldsymbol{AP}_1+t_2\boldsymbol{AP}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{AP}_n=$$
$$t_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{J}+t_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{J}+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{J}=(t_1\boldsymbol{P}_1+t_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{P}_n)\boldsymbol{J}=\boldsymbol{WJ}$$

因此,$\boldsymbol{W}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 化的变换矩阵当且仅当 $\boldsymbol{W}$ 可逆.下面讨论 W 的可逆性.

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{Q}^{-1}(t_1,t_2,\cdots,t_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1\\ \boldsymbol{P}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{P}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}^{-1}(t_1,t_2,\cdots,t_n)\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\cdots&\alpha_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}(t_1,t_2,\cdots,t_n)\begin{pmatrix}\alpha_{11}&(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\alpha_{11}&\cdots&(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}&(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\alpha_{21}&\cdots&(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\alpha_{21}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{n1}&(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\alpha_{n1}&\cdots&(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\alpha_{n1}\end{pmatrix}=$$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}(t_1,t_2,\cdots,t_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{QQ}^{-1}\alpha_{11}&\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{11}&\cdots&\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{11}\\ \boldsymbol{QQ}^{-1}\alpha_{21}&\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{21}&\cdots&\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{21}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \boldsymbol{QQ}^{-1}\alpha_{n1}&\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{n1}&\cdots&\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{n1}\end{pmatrix}=$$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\Big(\sum_{m=1}^{n}t_m\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{m1},(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})\sum_{m=1}^{n}t_m\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{m1},\cdots,(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\sum_{m=1}^{n}t_m\boldsymbol{Q}^{-1}\alpha_{m1}\Big)=$$

$$\begin{pmatrix}\sum_{m=1}^{n}t_mb_{1m}&0&\cdots&0\\ \sum_{m=1}^{n}t_mb_{2m}&\sum_{m=1}^{n}t_mb_{1m}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \sum_{m=1}^{n}t_mb_{nm}&\sum_{m=1}^{n}t_mb_{n-1,m}&\cdots&\sum_{m=1}^{n}t_mb_{1m}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{W}$ 为可逆矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{W}$ 为可逆矩阵 $\Leftrightarrow \sum_{m=1}^{n}t_mb_{1m}\neq 0$.

综上所述,原命题得证.

结合推论 1 和定理 4,又可得出定理 4 的另一个等价命题(定理 5).

定理 5　$\boldsymbol{W}$ 为 $\boldsymbol{A}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 相似于 Jordan 块矩阵)的 Jordan 化的变换矩阵当且仅当 $\boldsymbol{W}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的基础矩阵的线性组合,且 $\boldsymbol{W}$ 的最后一列不为零向量.

2　例　题

例题 1　求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 化的所有变换矩阵,其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1$$

而

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ -20 & -10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 20 \\ 0 & -7 & 10 & -20 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & -6 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

另外任取一个变换矩阵的逆

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{\ -1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 & 1/20 \\ 0 & 7/80 & 1/40 & -1/40 \end{pmatrix}$$

于是得所有变换矩阵

$$W = t_1\boldsymbol{P}_1 + t_2\boldsymbol{P}_2 + t_3\boldsymbol{P}_3 + t_4\boldsymbol{P}_4 = \begin{pmatrix} t_1 & 2t_1 + t_2 & 0 & 0 \\ t_2 & -4t_1 - 2t_2 & 0 & 0 \\ t_3 & 7t_1 + t_2 + t_3 + t_4 & 10t_1 & 20t_1 + 10t_2 \\ t_4 & -7t_1 - 6t_2 - t_3 - t_4 & 10t_1 + 10t_2 & -20t_1 - 10t_2 \end{pmatrix}$$

其中,t_1, t_2, t_3, t_4 满足 $2t_1+t_2 \neq 0$.

注:$2t_1+t_2 \neq 0$ 这个限制条件可以由 $t_1+\frac{1}{2}t_2 \neq 0$ 得出,也可以由 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20t_1+10t_2 \\ -20t_1-10t_2 \end{pmatrix} \neq 0$ 得出.

例题 2　求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 化的所有变换矩阵,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -36 & 7 & 9 & 4\\ 1 & 19 & -1 & -2 & -3\\ 4 & -5 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

解　$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \lambda=2$$

而

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -36 & 5 & 9 & 4\\ 1 & 19 & -1 & -4 & -3\\ 4 & -5 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2=\begin{pmatrix}1 & -11 & 2 & 3 & 1\\ 1 & -11 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 73 & -18 & -25 & -3\\ 2 & -85 & 19 & 27 & 5\\ 3 & -2 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^3=\begin{pmatrix}1 & 10 & -3 & -4 & 0\\ 1 & 10 & -3 & -4 & 0\\ 1 & -34 & 9 & 12 & 0\\ 2 & 53 & -15 & -20 & 0\\ 2 & 9 & -3 & -4 & 0\end{pmatrix},(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^4=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 5 & -5 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0 & -3 & -11 & 10 & -1\\ 1 & -3 & -11 & 10 & -1\\ 0 & -36 & 73 & -34 & 3\\ 0 & 19 & -85 & 53 & 5\\ 0 & -5 & -2 & 9 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0\\ 1 & 5 & -18 & 9 & 0\\ 0 & -1 & 19 & -15 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_4=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0\\ 0 & 9 & -25 & 12 & 0\\ 1 & -4 & 27 & -20 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_5=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 5 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

另外任取一个变换矩阵的逆

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{\ -1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 11 & -3 & -4 & 0\\ 0 & -21 & 5 & 7 & 1\\ 0 & 8 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

于是得所有的变换矩阵

$$\boldsymbol{W}=t_1\boldsymbol{P}_1+t_2\boldsymbol{P}_2+t_3\boldsymbol{P}_3+t_4\boldsymbol{P}_4+t_5\boldsymbol{P}_5=$$

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1-3t_2+t_3+t_4 & t_1-11t_2+2t_3+3t_4+t_5 & t_1+10t_2-3t_3-4t_4 & t_1-t_2 \\ t_2 & t_1-3t_2+t_3+t_4 & t_1-11t_2+2t_3+3t_4+t_5 & t_1+10t_2-3t_3-4t_4 & t_1-t_2 \\ t_3 & 2t_1-36t_2+5t_3+9t_4+4t_5 & t_1+73t_2-18t_3-25t_4-3t_5 & t_1-34t_2+9t_3+12t_4 & -3t_1+3t_2 \\ t_4 & t_1+19t_2-t_3-4t_4-3t_5 & 2t_1-85t_2+19t_3+27t_4+5t_5 & 2t_1+53t_2-15t_3-20t_4 & 5t_1-5t_2 \\ t_5 & 4t_1-5t_2+t_5 & 3t_1-2t_2-t_3-t_4+t_5 & 2t_1+9t_2-3t_3-4t_4 & t_1-t_2 \end{pmatrix}$$

其中,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5 满足 $t_1-t_2\neq 0$.

注:$t_1-t_2\neq 0$ 这个限制条件可以由 $t_1-t_2\neq 0$ 得出,也可以由 $\begin{pmatrix} t_1-t_2 \\ t_1-t_2 \\ -3t_1+t_2 \\ 5t_1-5t_2 \\ t_1-t_2 \end{pmatrix}\neq 0$ 得出.

参考文献:

[1] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组.高等代数[M].3 版.北京:高等教育出版社,2003

[2] 李炯生,查建国.线性代数[M]. 2 版.安徽:中国科学技术大学出版社,2003

[3] 张贤科,许甫华.高等代数学[M].2 版.北京:清华大学出版社,2008

All Transformation Matrices of Matrix *A* Similar to Jordan Block

CAI Yin, WANG Li-qing

(School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Zhejiang Wenzhou 325035, China)

Abstract: Any nonzero matrix has Jordan standard form and its transformation matrix is not unique, as a result, this paper summarizes all transformation matrices of Matrix A similar to Jordan block under Jordan standardization and proves their discriminating laws.

Key words: Jordan block; similarity; transformation matrix

责任编辑:李翠薇