文章编号:1672-058X(2014)11-0001-03

向量函数的不变伪线性及其应用*

杨　杰, 黄龙光**
(集美大学 理学院,福建 厦门 361021)

摘　要:利用 Dini 方向导数讨论向量不变 h-伪线性函数; 通过半序方法给出若干不可微且不变的伪线性方程解集的特性.

关键词:方向导数;伪线性;半序
中图分类号:O178　　**文献标志码**:A

伪线性在最优化理论中有着重要作用,近年来,Lalitha[1]将伪线性概念推广到不可微函数,并给出这些函数的若干性质.Ansari[2]引入了非空凸集中的 η-伪线性,但这些函数是不可微的,由此引发了将 η-伪线性延伸到凸集和不可微函数中的想法;最近 Ansari[3]又引入不变 h-伪线性,研究了不可微且不变的伪线性函数的有关问题.

1　预备知识

设 0 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的零向量,称映射 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是正齐次的当且仅当 $x\in\mathbf{R}^n$,$r>0$,有 $f(rx)=rf(x)$;次奇的当且仅当 $x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$,$f(x)=-f(-x)$.

定义 1　映射 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$,

(a) 点 $x\in\mathbf{R}^n$ 沿着 $d\in\mathbf{R}^n$ 方向的 Dini 上方向导数定义为 $f^{\mathrm{D}}(x,d)=(f_1^{\mathrm{D}},f_2^{\mathrm{D}},\cdots,f_m^{\mathrm{D}})$,其中

$$f_i^{\mathrm{D}}=\limsup_{t\to0^+}\frac{f_i(x+td)-f_i(x)}{t}=\inf_{s>0}\sup_{0<t<s}\frac{f_i(x+td)-f_i(x)}{t}(i=1,2,\cdots,m)$$

(b) 点 $x\in\mathbf{R}^n$ 沿着 $d\in\mathbf{R}^n$ 方向的 Dini 下方向导数定义为 $f_{\mathrm{D}}(x;d)=(f_{1\mathrm{D}},f_{2\mathrm{D}},\cdots,f_{m\mathrm{D}})$,其中

$$f_{i\mathrm{D}}=\liminf_{t\to0^+}\frac{f_i(x+td)-f_i(x)}{t}=\sup_{s>0}\inf_{0<t<s}\frac{f_i(x+td)-f_i(x)}{t}(i=1,2,\cdots,m)$$

对 $\forall d\in\mathbf{R}^n$ 有

$$f^{\mathrm{D}}(x;d)=-f_{\mathrm{D}}(x;-d);f_{\mathrm{D}}(x;d)=-f^{\mathrm{D}}(x;-d)\tag{1}$$

由定义 1 可知,$\forall d\in\mathbf{R}^n$ 有

$$f^{\mathrm{D}}(x;d)\geqslant f_{\mathrm{D}}(x;d)\tag{2}$$

由式(1)(2),对 $\forall x,d\in\mathbf{R}^n$ 有

收稿日期:2014-04-03;**修回日期**:2014-05-07.
* **基金项目**:国家自然科学基金资助项目(11074099).
作者简介:杨杰(1991-),男,江苏靖江人,硕士研究生,从事应用泛函分析与最优化理论研究.
** **通讯作者**:黄龙光(1961-),男,福建龙岩人,教授,博士,从事应用泛函分析与最优化理论研究.E-mail:jsyjge@ 163.com..

$$f^{\mathrm{D}}(x;d) \geqslant f_{\mathrm{D}}(x;d) = -f^{\mathrm{D}}(x;-d) \tag{3}$$

即 $f^{\mathrm{D}}(x;d)$ 是次奇的.易知对每个确定的 $x\in\mathbf{R}^n$,$f^{\mathrm{D}}(x;d)$ 和 $f_{\mathrm{D}}(x;d)$ 是正齐次的.

下面的条件 C 在研究伪线性中有重要作用.

条件 C　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 关于 η 是内凸的[3],对 $\forall x,y\in K,t\in[0,1]$,有

(a) $\eta(x,x+t(\eta(y,x)))=-t\eta(y,x)$;

(b) $\eta(y,x+t(\eta(y,x)))=(1-t)\eta(y,x)$.

显然,映射 $\eta(y,x)=y-x$ 满足条件 C.若 η 满足条件 C,那么

$$\eta(x+t(\eta(y,x)),x)=t\eta(y,x),t\in[0,1] \tag{4}$$

定义 2　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 关于 η 是内凸的,且 η 满足条件 C,$f:K\to\mathbf{R}^m$ 是 η 拟凸的当且仅当对 $\forall x,y\in K,t\in[0,1]$有

$$f(x+t\eta(y,x)) \leqslant \max\{f(x),f(y)\}$$

此“$\leqslant$”是 $\mathbf{R}^m_+$中的半序[4],文献[3]中,$f:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 是预凸的显然满足 $f:K\to\mathbf{R}^m$ 关于 η 是拟凸的.

定义 3　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 关于 η 是内凸的,$h:K\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$,称映射 $f:K\to\mathbf{R}^m$,

(a) 关于 η 是 h-伪内凸的当且仅当对 $\forall x,y\in K,x\neq y$,有

$$f(x)-f(y)\in\operatorname{int}\mathbf{R}^m_+ \Rightarrow h(x,\eta(y,x))\in-\operatorname{int}\mathbf{R}^m_+$$

等价地

$$h(x,\eta(y,x))\in\mathbf{R}^m_+ \Rightarrow f(y)-f(x)\in\operatorname{int}\mathbf{R}^m_+$$

(b) 关于 η 是 h-伪内凹的当且仅当对 $\forall x,y\in K,x\neq y$,有

$$f(y)-f(x)\in\operatorname{int}\mathbf{R}^m_+ \Rightarrow h(x,\eta(y,x))\in\operatorname{int}\mathbf{R}^m_+$$

等价地

$$h(x,\eta(y,x))\in-\mathbf{R}^m_+ \Rightarrow f(x)-f(y)\in\mathbf{R}^m_+$$

(c) 关于 η 是不变 h-伪线性的当且仅当关于 η 既是 h-伪内凸的又是 h-伪内凹的[3].

以下总设 η 满足条件 C,$K\subseteq\mathbf{R}^n$ 关于 η 是内凸的, $f:K\to\mathbf{R}^m$,$h:K\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$.

2　向量不变伪线性函数的若干性质

定理 1　设对每个固定的 $x\in K,h(x;\cdot)$是线性的, f 关于 η 是不变 h-伪线性的且使得

$$f_{\mathrm{D}}(x;\cdot)\leqslant h(x;\cdot)\leqslant f^{\mathrm{D}}(x;\cdot) \tag{5}$$

成立.那么对于任意 $x,y\in K,h(x;\eta(y,x))=0$ 当且仅当 $f(x)=f(y)$.

证明　必要性.由 f 关于 η 是 h-伪内凸的,知 $h(x;\eta(y,x))\in\mathbf{R}^m_+$,即

$$f(y)-f(x)\in\mathbf{R}^m_+ \tag{6}$$

由 f 关于 η 是 h-伪内凹的,知 $h(x;\eta(y,x))\in-\mathbf{R}^m_+$,即

$$f(x)-f(y)\in\mathbf{R}^m_+ \tag{7}$$

由式(6)(7)知 $h(x;\eta(y,x))=0$,即 $f(x)=f(y)$.

充分性.对 $\forall t\in(0,1)$,

$$f(x+t\eta(y,x))=f(x) \tag{8}$$

因 $f(x+t\eta(y,x))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$,$f(x)=f(y)$ 得 $f(x)-f(x+t\eta(y,x))\in\mathbf{R}^m_+$.

由 f 关于 η 是 h-伪内凹的可知

$$h(z_t;\eta(x,z_t))\in\mathbf{R}^m_+(z_t=x+t\eta(y,x)) \tag{9}$$

根据条件 C,

$$\eta(x,x+t\eta(y,x))=-t\eta(y,x)=\frac{-t}{1-t}(y,x+t\eta(y,x))\tag{10}$$

由式(9)(10)有 $h\left(z_t;-\dfrac{t}{1-t}\eta(y,z_t)\right)\in\mathbf{R}_+^m$,所以 $h(z_t;\eta(y,z_t))\in-\mathbf{R}_+^m$,即 $f(x+t\eta(y,x))-f(y)\in\mathbf{R}_+^m$,即 $f(x+t\eta(y,x))-f(x)\in\mathbf{R}_+^m$,因为 $f(x)=f(y)$.综上 $f(x+t\eta(y,x))=f(x)$.再由 Dini 上下方向导数的定义可知 $f_{\mathrm{D}}(x;\eta(y,x))=f^{\mathrm{D}}(x;\eta(y,x))=0$.由式(5)知 $h(x;\eta(y,x))=0$.

定理 2　设对固定的 $x\in K$,$h(x;\cdot)$是线性的且 f 满足式(5),那么 f 关于 η 是不变 h-伪线性的当且仅当存在一个实值函数 $p:K\times K\to\mathbf{R}$,使得对所有的 $x,y\in K$,$p(x,y)>0$ 且

$$f(y)=f(x)+p(x,y)h(x;\eta(y,x))\tag{11}$$

证明　充分性.设 f 关于 η 是不变 h-伪线性的,构造函数 $p:K\times K\to\mathbf{R}$,使 $p(x,y)>0(\forall x,y\in K)$,且

$$\begin{cases}p(x,y)h(x;\eta(y,x))=f(y)-f(x),h(x;\eta(y,x))\neq 0\\ p(x,y)=1,h(x;\eta(y,x))=0\end{cases}\tag{12}$$

当 $h(x;\eta(y,x))=0$ 时,由定理 1 有 $f(x)=f(y)$;当 $h(x;\eta(y,x))\neq 0$ 时,须证明 $p(x,y)>0$.若 $f(y)-f(x)\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^m$,由 f 关于 η 是 h-伪内凹的可知 $h(x;\eta(y,x))\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^m$,那么由式(12)可得,$p(x,y)>0$.类似地,当 $f(y)-f(x)\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^m$ 也有 $p(x,y)>0$.

必要性.设存在一个实值函数 $p:K\times K\to\mathbf{R}$,使得任意的 $x,y\in K$,$p(x,y)>0$,且满足式(11).若 $h(x;\eta(y,x))\in\mathbf{R}_+^m$,则 $f(y)-f(x)=p(x,y)h(x;\eta(y,x))\in\mathbf{R}_+^m$,因此 f 关于 η 是 h-伪内凸的.同理,若 $h(x;\eta(y,x))\in-\mathbf{R}_+^m$,则 f 关于 η 是 h-伪内凹的.于是 f 关于 η 是不变 h-伪线性的.

3　向量不变伪线性函数的优化问题

考虑下列优化问题

$$(\mathrm{OP})\qquad \min_{x\in K}f(x)$$

其中 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 关于 η 是内凸的,并设(OP)的解集 $S=\arg\min_{x\in K}f(x)$ 是非空的.

定理 3　设 h 使得对每个固定的 $x\in K$,$h(x;\cdot)$是线性的,若 f 关于 η 是不变 h-伪线性的且满足式(5),$\bar{x}\in S$,那么 $S=S_1=S_2=S_3=S_4$,其中

$$S_1=\{x\in K:h(x;\eta(\bar{x},x))=0\},S_2=\{x\in K:h(\bar{x};\eta(x,\bar{x}))=0\}$$

$$S_3=\{x\in K:h(x;\eta(\bar{x},x))\in\mathbf{R}_+^m\},S_4=\{x\in K:h(\bar{x};\eta(x,\bar{x}))\in-\mathbf{R}_+^m\}$$

证明　$x\in S$ 当且仅当 $f(x)=f(\bar{x})$.由定理 1 得 $h(x;\eta(\bar{x},x))=0$,因此 $S=S_1$,类似地有 $S=S_2$.知 $S\subseteq S_3$,再证 $S_3\subseteq S$.设 $x\in S_3$,则 $h(x;\eta(\bar{x},x))\in\mathbf{R}_+^m$.由 f 关于 η 是 h-伪内凸的可得 $f(\bar{x})-f(x)\in\mathbf{R}_+^m$,即意味着 $x\in S$,所以 $S_3\subseteq S$,即 $S=S_3$. 设 $x\in S_4$,则 $h(\bar{x};\eta(x,\bar{x}))\in-\mathbf{R}_+^m$,由 f 关于 η 是 h-伪内凹的可得 $f(x)-f(\bar{x})\in-\mathbf{R}_+^m$,即意味着 $x\in S$,所以 $S_4\subseteq S$,又显然 $S\subseteq S_4$,那么 $S=S_4$. 综上,$S=S_1=S_2=S_3=S_4$.

定理 4　设 K,η,f,h 与定理 3 相同,若 $\bar{x}\in S$,那么 $S=S_5$,其中 $S_5=\{x\in K:h(\bar{x},\eta(x,\bar{x}))-h(x,\eta(\bar{x},x))\in-\mathbf{R}_+^m\}$.

证明　设 $x\in S$,由定理 3 可知 $h(x,\eta(\bar{x},x))\in\mathbf{R}_+^m$,又 $h(\bar{x},\eta(x,\bar{x}))=0$,所以

$$h(\bar{x},\eta(x,\bar{x}))-h(x,\eta(\bar{x},x))\in-\mathbf{R}_+^m\tag{13}$$

因此 $x\in S_5$,故 $S\subseteq S_5$.下证 $S_5\subseteq S$.设 $x\in S_5$,那么 $h(\bar{x},\eta(x,\bar{x}))-h(x,\eta(\bar{x},x))\in-\mathbf{R}_+^m$.设 $x\notin S$,则 $f(\bar{x})-f(x)\in-\operatorname{int}\mathbf{R}_+^m$,再由 f 关于 η 是 h-伪内凹的可得 $h(\bar{x},\eta(x,\bar{x}))\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^m$,由式(13)有 $h(x,\eta(\bar{x},x))\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^m$.又 f 关于 η 是 h-伪内凸的,因此有 $f(\bar{x})-f(x)\in\mathbf{R}_+^m$,因此 $x\in S$.

(下转第 9 页)