

文章编号:1672-058X(2013)08-0023-05

# 一类具有可变输入率和可变服务率的 M/M/1 排队模型

付馨雨

(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

**摘要:**把具有可变输入率的 M/M/1 排队模型和可变服务率 M/M/1 的排队模型进行了结合研究,即讨论了输入率可变同时服务率可变的情况;考虑了输入率  $\lambda_k$  和服务率  $\mu_k$  都随队长  $k$  的变化而发生变化,从而建立了输入率可变且服务率可变的 M/M/1 排队模型,得到了该模型的平稳分布以及各项重要指标。

**关键词:**可变输入率;可变服务率;M/M/1 排队模型

**中图分类号:**O405

**文献标志码:**A

## 1 模型假设

在日常生活中,经常可以看到顾客到达某服务台前,发现因排队顾客较多而犹豫是否加入队列等待服务的现象。一般而言,到达顾客进入系统的概率随当时的队长而发生变化,若队列较短,加入队列的可能性较大,反之则较小。另一方面,对服务台而言,为了使顾客得到更好的服务,服务率应随系统的队长  $K$  而发生变化,即队长越长服务率越大。讨论了顾客以概率  $\alpha_k = \frac{\lambda}{\beta^{k+1}}$  进入系统,同时当排队长度超过  $n$  时,服务率用快速服务率  $i\mu (i>1)$ ,反之则用慢服务率  $\mu$  的情形,得到了系统的平稳分布、平均队长、平均等待队长、顾客的平均输入率等相关指标。

对于本排队模型,做以下假设。系统中有一个服务窗口,顾客到达系统的时间间隔服从参数为  $\lambda$  的指数分布;系统对每个顾客的服务时间服从参数为  $\mu$  的指数分布;顾客的到达时间与服务时间相互独立;到达顾客加入队列排队等候服务的概率  $\alpha_k = \frac{\lambda}{\beta^{k+1}} (k \in N, \beta$  为正常数);队长超过  $n$  时,服务率为  $i\mu (i>1)$ ,反之为  $\mu$ 。

## 2 数学模型

根据上面的假设不难得到如下定理:

**定理 1** 令  $X(t)$  表示在时刻  $t$  系统中的顾客数(队长),则  $\{X(t), t \geq 0\}$  是状态空间为  $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , 生率  $\lambda_k$ , 灭率  $\mu_{(k)}$  如下:

收稿日期:2013-03-02;修回日期:2013-03-18.

作者简介:付馨雨(1990-),女,辽宁朝阳人,硕士研究生,从事随机系统分析研究.

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda \alpha_k = \frac{\lambda}{\beta k + 1}, k = 0, 1, 2, \dots \\ \mu_{(k)} = \begin{cases} \mu, 0 \leq k \leq n \\ i\mu, k \geq n \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

于是,可画出系统状态流图(图 1):

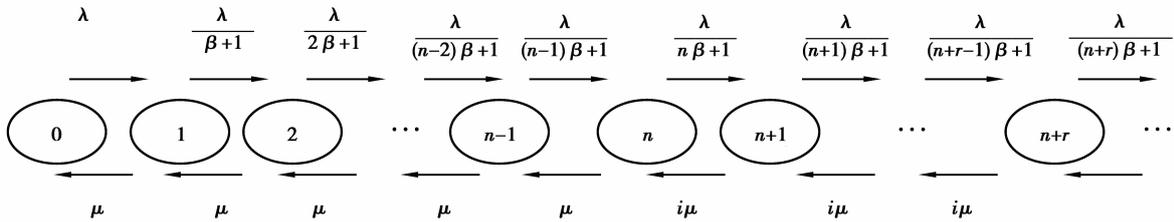


图 1 系统状态流图

### 3 平稳分布

定理 2 设  $P_k(t) = P\{X(t) = k\}$ ,  $k \in I, \{X(t), t \geq 0\}$  存在平稳分布

$$P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = \begin{cases} \frac{\rho^k}{(\beta + 1)(2\beta + 1) \cdots [(k - 1)\beta + 1]} p_0, 1 \leq k \leq n \\ \frac{\rho^k}{(\beta + 1)(2\beta + 1) \cdots [(k - 1)\beta + 1]} \cdot \frac{1}{i^{k-n}} p_0, k > n \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , 这里有:

$$P_0 = \left\{ 1 + \rho + \frac{\rho^2}{\beta + 1} + \dots + \frac{\rho^n}{(\beta + 1)(2\beta + 1) \cdots [(n - 1)\beta + 1]} + \frac{\rho^{n+1}}{(\beta + 1)(2\beta + 1) \cdots (n\beta + 1)} \cdot \frac{1}{i} + \dots + \frac{\rho^{n+r}}{(\beta + 1)(2\beta + 1) \cdots [(n + r - 1)\beta + 1]} \cdot \frac{1}{i^r} + \dots \right\}^{-1}$$

证明 由状态转移图列出 K 氏代数方程:

对 0 状态有:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$$

对 1 状态有:

$$\frac{\lambda}{\beta + 1} p_1 = \mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{(\beta + 1)\mu} p_1 = \frac{\rho^2}{(\beta + 1)} p_0$$

.....

对 n-1 状态有:

$$\frac{\lambda}{(n - 1)\beta + 1} p_{n-1} = \mu p_n \Rightarrow p_n = \frac{\rho^n}{(\beta + 1)(2\beta + 1) \cdots [(n - 1)\beta + 1]} p_0$$

对 n 状态有:

$$\frac{\lambda}{n\beta + 1} p_n = i\mu p_{n+1} \Rightarrow p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{(\beta + 1)(2\beta + 1) \cdots (n\beta + 1)} \cdot \frac{1}{i} \cdot p_0$$

.....

对  $n+r-1$  状态有:

$$\frac{\lambda}{(n+r-1)\beta+1} p_{n+r-1} = i\mu p_{n+r} \Rightarrow$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(n+r-1)\beta+1]} \cdot \frac{1}{i^r} \cdot p_0$$

.....

综上有

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]} p_0, & 1 \leq k \leq n \\ \frac{\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]} \cdot \frac{1}{i^{k-n}} p_0, & k > n \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

由正则性  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$  得到:

$$P_0 = \left\{ 1 + \rho + \frac{\rho^2}{\beta+1} + \cdots + \frac{\rho^n}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(n-1)\beta+1]} + \frac{\rho^{n+1}}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots(n\beta+1)} \cdot \frac{1}{i} + \cdots + \frac{\rho^{n+r}}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(n+r-1)\beta+1]} \cdot \frac{1}{i^r} + \cdots \right\}^{-1}$$

值得注意的是,当  $\beta=1, i=1$  时,有  $P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot e^{-\rho}, k=0, 1, 2, \dots$ , 即平稳分布为参数是  $\rho$  的泊松分布,与文献[1]的结论一致。

### 4 主要指标

根据平稳分布,得到如下主要数学指标:

(1) 顾客的平均输入率  $\bar{\lambda}$ 。由式(1)、(2)可得顾客的平均输入率:

$$\bar{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k P_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\beta k + 1} P_k$$

(2) 平均队长(系统内顾客数的均值)。首先队长  $l_s$  有分布列如表 1 所示。

表 1  $l_s$  分布列表

$l_s$	0	1	2	...	$k$	...
$P_k$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	...	$P_k$	...

故平均队长:

$$L_s = E(l_s) = 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + \cdots + k \times p_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]} P_0 + \sum_{k=n}^{\infty} k \frac{\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]} \frac{1}{i^{k-n}} P_0$$

$$= P_0 \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]} \frac{1}{i^{k-n}} \right\}$$

(3) 正在被服务的平均队长。注意到正在被服务的队长  $l_f$  有分布列(表 2):

表 2 被服务队长  $l_f$  分布列表

$l_f$	0	1
$P_k$	$P_0$	$1-P_0$

故正在被服务的平均队长:

$$L_f = E(l_f) = 0 \times p_0 + 1 \times (1 - p_0) = 1 - p_0$$

(4) 平均等待队长(系统内排队等候的顾客均值):

$$L_q = L_s - L_f = L_s - (1 - p_0)$$

或由等待队长  $l_q$  的分布列(表 3)。

表 3 等待队长  $l_q$  分布列表

$l_q$	0	1	2	...
$P_k$	$P_0+P_1$	$P_2$	$P_3$	...

得平均等待队长:

$$L_q = E(l_q) = 0 \times (p_0 + p_1) + 1 \times p_2 + 2 \times p_3 + \dots + k \times p_{k+1} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k p_{k+1}$$

$$= P_0 \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k \rho^{k+1}}{(\beta + 1)(2\beta + 1) \dots (k\beta + 1)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k \rho^{k+1}}{(\beta + 1)(2\beta + 1) \dots (k\beta + 1)} \frac{1}{i^{k+1-n}} \right\}$$

(5) 顾客在系统内平均逗留时间。由 little 公式得:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

(6) 顾客平均排队等待时间。由 little 公式得:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

## 5 结 论

本文研究了具有可变输入率和可变服务率的 M/M/1 排队模型,并获得了该模型的平稳分布和主要指标,充分考虑了输入率和服务率与系统中对长的关系。当  $i=1$  时正是文献[7]的结果,因此本文在具有快慢两档的服务率的情况下,将其推广到更为一般的情形,更具有普遍性也更接近于生活。

### 参考文献:

[1] 陆传赓.排队论[M].北京:北京邮电大学出版社,2009  
 [2] 孙荣恒.随机过程及其应用[M].北京:清华大学出版社,2004  
 [3] 孙荣恒,李建平.排队论基础[M].北京:科学出版社,2002  
 [4] 刘次华.随机过程及其应用[M].高等教育出版社,2004  
 [5] 唐应辉,唐小我.排队论基础与分析技术[M].北京:科学出版社,2006  
 [6] 田铮,秦超英等.随机过程与应用[M].北京:科学出版社,2007  
 [7] 台文志,高世泽.一类具有可变输入率的 M/M/1 排队模型[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2009,26(1):69-72

## M/M/1 Queuing Model with Variable Input Rate and Adjustable Service Rate

**FU Xin-yu**

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

**Abstract:** This paper combines M/M/1 Queuing Model with variable input rate and M/M/1 Queuing Model with adjustable service rate, i. e. discusses the condition with variable input rate and adjustable service rate, considers that queuing length  $k$  changes with the change of input rate  $\lambda_k$  and service rate  $\mu_k$  so that M/M/1 Queuing Model with variable input rate and adjustable service rate is constructed and stable distribution and all indicators of this model are obtained.

**Key words:** variable input rate; adjustable service rate; M/M/1 Queuing Model

责任编辑:代小红

---

(上接第 14 页)

## The Super Edge-magic Labeling of a Class of Tree Graphs $T_{n,n}^2$

**HE Fang<sup>1</sup>, LIU Jia-bao<sup>2</sup>**

(1. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China;

2. Fundamental Courses Department, Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China )

**Abstract:** In this paper, we study the super edge-magic labeling of a class of tree graphs  $T_{n,n}^2$ . by utilizing the definition of edge-magic labeling and super edge-magic labeling in graph theory, two different algorithms are given to prove that the tree graphs are not only edge-magic graphs, but also super edge-magic graphs; so as to demonstrate part of the conjecture that trees are super edge-magic graphs.

**Key words:** super edge-magic labeling; super edge-magic graphs; tree graphs

责任编辑:代小红