文章编号:1672-058X(2013)08-0019-04

跳扩散最优停时与随机控制的结合及应用

赵婷婷,王子亭,张 辉
(中国石油大学(华东)理学院,山东 青岛 266580)

摘 要:以随机分析知识和最优控制理论为基础,结合动态规划原理和 HJB 方程,在一般的随机控制模型基础上,添加了“控制”和“停时”,讨论了在跳跃扩散市场下,最优停时与随机控制相结合的投资问题,并建立模型求解,最后通过一个例子说明在经济中最优停时是如何与随机控制相结合的.

关键词:跳跃扩散;最优停时;随机控制;HJB 方程
中图分类号:O231.3 **文献标志码**:A

自金融市场均衡模型出现后,现代金融理论一个值得重视的领域是解决带随机性的问题,而解决这个问题的重要手段是随机最优控制理论.1978 年,我国学者彭实戈给出了随机最优控制理论的最大值原理,1990 年 E. Pardoux & Peng 提出倒向随机微分方程理论.随着最优控制理论的发展,一类带停时的随机控制模型被提出,即费用函数结构中增加“停时”,则该问题的最优策略变为最优控制和最优停时两个.这类带停时的随机控制问题是结合随机分析等理论对金融投资模型的讨论和研究,其不仅是对随机控制理论的完善和充实,也是对金融投资模型在实际应用中的推广,因此此类问题吸引了不少学者的关注和研究.

Zervos[1]研究了带最优停时的脉冲控制问题;郭文旌[2]在传统均值——方差组合投资模型基础上,引进一个随机性二次最优控制问题作为原问题的近似问题,证明了一个状态为跳跃扩散过程的一般最优控制问题的验证性定理,并得到了原问题的最优策略;柏立华[3]在他的博士论文中建立了与实际跟贴切的随机控制模型,使方法不再局限于 HJB 方程;于洋[4,5]研究了一类带停时的奇异型随机控制问题,从受控状态过程和费用函数结构两个方面对原模型进行了推广.然而,在跳跃扩散市场下,研究最优停时和随机控制相结合的投资组合问题的并不多见,鉴于此,本文在一般的随机控制模型基础上,考虑最优停时和最优控制,建立模型求解.

1 模型的建立

在跳跃扩散市场下,考虑最优停时与随机控制相结合的投资组合问题.首先来考虑这样一个随机控制系统 $Y^{(u)}(t)=Y(t)\in\mathbf{R}^k$,它满足如下条件:

$$\mathrm{d}Y(t)=b(Y(t),u(t))\mathrm{d}t+\sigma(Y(t),u(t))\mathrm{d}B(t)+\int_{\mathbf{R}^k}\gamma(Y(t^-),u(t^-),z)\overline{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z) \tag{1}$$

这里 $b:\mathbf{R}^k\times U\rightarrow\mathbf{R}^k$,$\sigma:\mathbf{R}^k\times U\rightarrow\mathbf{R}^{k\times m}$,$\gamma:\mathbf{R}^k\times U\times\mathbf{R}^k\rightarrow\mathbf{R}^{k\times l}$ 为给定的函数控制 $u(t)=u(t,\omega)$ 假设是 F_t-适应的,且取值于给定的闭凸集 $U\subset\mathbf{R}^l$.那么对应于控制 $u=u(t,\omega)$ 和停时的目标函数:

收稿日期:2013-03-02;**修回日期**:2013-04-21.

作者简介:赵婷婷(1986-),女,山东聊城人,研究生,从事金融数学与金融分析研究.

$$J^{(u,\tau)}(y)=E^{y}\left[\int_{0}^{\tau}f(Y(t),u(t))\mathrm{d}t+g(Y(\tau))\mathcal{X}_{\{\tau<\infty\}}\right] \tag{2}$$

其中$f:\mathbf{R}^{k}\times U\to\mathbf{R}$(利润率)和$g:\mathbf{R}^{k}\to\mathbf{R}$(馈赠函数)是给定的函数.

假设与控制 u 对应的方程(1)具有唯一的强解,且满足:

$$E^{y}\left[\int_{0}^{\tau_S}|f(Y(t),u(t))|\,\mathrm{d}t\right]<\infty\ \forall y\in S \tag{3}$$

其中 $\tau_S=\tau_S(y,u)=\inf\{t>0,Y^{(u)}(t)\notin S\}$ 对于所有的 y,$\{g^{-}(Y^{(u)}(\tau));\tau\in T\}$ 是一致 P^{y}-可积的,其中$g^{-}(y)=\max(0,-g(y))$,则称控制为容许控制.所有容许控制构成的集合称为容许控制集.如果 $\tau(\omega)=\infty$,$g(Y(\tau(\omega)))$定义为零,则 $S\subset\mathbf{R}^{k}$ 是固定的 Borel 集,满足 $S\subset\overline{S^{0}}$,其中 S 可理解为所研究系统的宇宙或可偿付集,在此只研究倒闭时间 T 之前的系统状态.

设 T 是 F_t-停时 $\tau\leqslant\tau_S$,求 $\Phi(y)$ 和 $u^{*}\in U,\tau^{*}\in T$ 使

$$\Phi(y)=\sup\{J^{(u,\tau)}(y);u\in U,\tau\in T\}=J^{(u^{*},\tau^{*})}(y) \tag{4}$$

如果控制可表示为 $u(t)=u_0(Y(t))$,其中 $u_0:\overline{S}\to U$ 为某个函数,则称 Markov 控制.通常不区别,简单记为 $u(t)=u(Y(t))$.如果 $u\in U$ 是 Markov 控制,$Y^{(u)}(t)$ 是 Markov 过程,其生成元在 $C_0^2(\mathbf{R}^{k})$ 上与微分算子$L=L^{u}$ 一致,即对于所有的关于 y 二阶连续可微函数 $\psi:\mathbf{R}^{k}\to\mathbf{R}$.

$$L^{u}\psi(y)=\sum_{i=1}^{k}b_i(y,u(y))\frac{\partial\psi}{\partial y_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}(\sigma\sigma^{T})_{ij}(y,u(y))\frac{\partial^2\psi}{\partial y_i\partial y_j}+$$
$$\sum_{j=1}^{l}\int_{\mathbf{R}}\{\psi(y+\gamma^{(j)}(y,u(y),z_j))-\psi(y)-\nabla\psi(y).\gamma^{(j)}(y,u(y),z_j)\}\nu_j(\mathrm{d}z_j) \tag{5}$$

典型的值函数在连续区域 D 的边界∂D 之外是 C^2 的,在 D 内满足 HJB 方程,在$\overline{D}$之外满足 HJB 不等式.在边界∂D 上不是 C^2 的,通常是 C^1 的,通常称为高阶接触或光滑匹配原理.下面将证明这个问题的验证定理,该验证定理可视为最优停时定理和随机控制的 HJB 方程定理的结合.

2 最优停止和随机控制的 HJB 方程定理的结合

(a) 假设函数 $\varphi:\overline{S}\to R$ 满足如下条件 1)-8),则有 $\varphi(y)\geqslant\Phi(y)\ \forall y\in S$

1) $\varphi\in C^{1}(S^{0})\cap C(\overline{S})$

2) 在 S^0 上 $\varphi\geqslant g$,定义 $D=\{y\in S;\varphi(y)>g(y)\}$,假设 $Y^{(u)}(t)$以概率 1 在边界∂D 上逗留 0 时间,即如下 3);

3) $E^{y}[\int_0^{\tau_S}\mathcal{X}_{\partial D}(Y^{(u)}(t))\mathrm{d}t]=0\ \forall y\in S,u\in U$;

4) ∂D 是 Lipschitz 曲面;

5) $\varphi\in C^{2}(S^{0}\setminus\partial D)$,$\varphi$ 的二阶导数在∂D 邻域是局部有界的;

6) $L^{v}\varphi(y)+f(y,v)\leqslant 0$ 在 $S^{0}\setminus\partial D$, $\forall v\in U$;

7) $Y^{(u)}(\tau_S)\in\partial S a.s.\{\tau_S<\infty\}\lim_{t\to\tau_S^{-}}\varphi(Y^{(u)}(t))=g(Y^{(u)}(\tau_S))\mathcal{X}_{\{\tau_S<\infty\}}\,a.s.$

8) $E^{y}[|\varphi(Y^{(u)}(\tau))|+\int_0^{\tau_S}\{|A\varphi(Y^{(u)}(t))|+|\sigma^{T}(Y(t))\nabla\varphi(Y(t))|^{2}]+\sum_{j=1}^{l}\int_{R}|\varphi(Y(t)+\gamma^{(j)}(Y(t),u(t),z_j))-\varphi(Y(t))|^{2}\nu_j(\mathrm{d}z_j)\}\mathrm{d}t]<\infty$.

(b) 另外假设如下条件 9)-11)成立,且假设 $\hat{u}\in U$,则有 $\varphi(y)=\Phi(y)\ \forall y\in S$ 并且 $u^{*}=\hat{u},\tau^{*}=\tau_D$ 分别为最优控制和停时.

9) 对于每个 $y\in D$,存在 $\hat{u}(y)\in U$ 成立 $L^{\hat{u}(y)}\varphi(y)+f(y,\hat{u}(y))=0$;

10) $\tau_D = \inf\{t>0; Y^{(\hat{u})}(t) \notin D\} < \infty \ a.s.\ \forall y \in S$;

11) 族 $\{\varphi(Y^{(\hat{u})}(\tau)); \tau \in T\}$ 对于所有的 $y \in D$,关于 P^y 是一致可积的.

备注 1:如果忽略如上定理的技术条件而集中于条件 2),6)和 9),则该定理的条件可表示为如下紧凑形式:

$$\max(\sup_{v\in U}\{L^v\varphi(y) + f(y,v)\}, g(y) - \varphi(y)) = 0 \ \forall y \in S^0 \tag{6}$$

既然这是随机控制 HJB 方程和最优停止变分不等式的结合,因此称式(6)为 HJBVI.能够证明,在某些条件下,值函数 φ 是式(6)在粘性解意义下的解,

备注 2:问题(4)作为特例包含一般最优停止问题.如果 b,σ 和 f 不包含 u,问题退化为一般的最优停止问题:$\Phi(y) = \sup\limits_{\tau\in T} E^y[\int_0^\tau f(Y(t))\mathrm{d}t + g(Y(\tau))\chi_{\{\tau<\infty\}}]$.

HJBVI 式(6)变为 VI:

$$\max(L\Phi(y) + f(y), g(y) - \Phi(y)) = 0; y \in S^0 \tag{7}$$

问题(4)也密切相关于一般的随机控制问题.在这里停时 τ 固定为 $\tau = \tau_S$,问题就是求 $\Phi(y)$ 和 $u^* \in U$ 使 $\Phi(y) = \sup\limits_{u\in U} J^{(u)}(y) = J^{(u^*)}(y)$,其中 $J^{(u)}(y) = E^y[\int_0^{\tau_S} f(Y(t), u(t))\mathrm{d}t + g(Y(\tau_S))\chi_{\{\tau_S<\infty\}}]$.

关于该定理的证明及变分不等式的问题,详见文献[5],该定理把最优停时和随机控制相结合,把一般的随机控制问题扩展到了跳跃扩散市场下进行讨论,另外更多关于停时和随机控制的问题详见文献[6-8].下面举例说明跳跃扩散市场下,最优停时和随机最优控制是怎样结合的.

3　应用举例

运用上述定理及模型,在此来讨论最优资源开发控制和停止问题,通过这个例子,说明最优停时和随机最优控制是怎样结合的.

设单位资源(天然气和石油)在时间 t 的价格为 $P_t = P(t)$,服从几何 Levy 过程:

$$\mathrm{d}P(t) = P(t^-)(\alpha\mathrm{d}t + \beta\mathrm{d}B(t)) + \gamma\int_R z\bar{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}z); P_0 = p \geqslant 0$$

其中 $\alpha,\beta \neq 0,\gamma$ 为常数满足 $\gamma z \geqslant -1 a.s.\nu$.

设 Q_t 表示时刻 t 的剩余资源量,资源开发强度为 $u_t = u_t(\omega) \in [0,m]$,则 Q_t 满足 $\mathrm{d}Q_t = -u_tQ_t\mathrm{d}t; Q_0 = q \geqslant 0$,$m$ 为最大强度常数.假设控制 $u_t(\omega)$ 是 $\{F\}_{t\geqslant 0}$ 适应的,如果油田开采过程的运营费用为 $K_0 + K_1u_t(K_0, K_1 \geqslant 0)$,如果在时间$\tau(\omega) \geqslant 0$ 决定停止开采,期望的整体利润:

$$J^{(u,\tau)}(p,q) = E^{(p,q)}[\int_0^\tau e^{-\rho t}(u_t(P_tQ_t - K_1) - K_0)\mathrm{d}t + e^{-\rho\tau}(\theta P_\tau Q_\tau - a)]$$

假设关闭时间 τ 是关于代数流$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$的停时,即$\{\omega; \tau(\omega) \leqslant t\} \in F_t$,$\forall t$,开采强度和是否在 t 之前停止的决策只能基于信息 F_t,不能依赖于任何将来的信息.问题就是求值函数 $\Phi(p,q)$ 和最优控制 $u_t^* \in [0,m]$ 和最优停时 τ^*,使 $\Phi(p,q) = \sup\limits_{u_t,\tau} J^{(u,\tau)}(p,q) = J^{(u^*,\tau^*)}(p,q)$,这个问题就是一个最优停止与随机控制结合的例子.

在这种情况下,时间-空间过程 $\mathrm{d}Y(t) = (\mathrm{d}t, \mathrm{d}P_t, \mathrm{d}Q_t); Y(0) = (s,p,q) \in [0,\infty)^3$ 的生成元:

$$L^u\psi(s,p,q) = \frac{\partial\psi}{\partial s} + \alpha p\frac{\partial\psi}{\partial p} - uq\frac{\partial\psi}{\partial q} + \frac{1}{2}\beta^2p^2\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} +$$

$$\int_R\{\psi(s,p+\gamma pz,q) - \psi(s,p,q) - \frac{\partial\psi}{\partial p}(s,p,q).\gamma zp\}\nu(\mathrm{d}z)$$

根据定理 2,求 $S=[0,\infty)^3$ 的子集 D 和函数 $\varphi(s,p,q):S\to R$ 使 $\varphi(s,p,q)=e^{-\rho s}(\theta pq-a)\ \forall(s,p,q)\notin D$,$\varphi(s,p,q)\geqslant e^{-\rho s}(\theta pq-a)\ \forall(s,p,q)\in S$,$L^v\varphi(s,p,q)+e^{-\rho s}(v(pq-K_1)-K_0)\leqslant 0\ \forall(s,p,q)\in S^0\backslash\overline{D}$, $\forall v\in[0,m]$, $\sup\limits_{v\in[0,m]}\{L^v\varphi(s,p,q)+e^{-\rho s}(v(pq-K_1)-K_0)\}=0\ \forall(s,p,q)\in D$,设 φ 取如下形式 $\varphi(s,p,q)=e^{-\rho s}F(w)$,$w=pq$.

连续区域 D 具有如下形式:$D=\{(s,p,q);pq>w_0\}$ 对于某个 $w_0>0$.

4 结束语

本文充分运用随机分析和最优控制理论,并通过动态规划原理和 HJB 方程,建立了跳扩散市场下最优停时和随机控制的模型,并解决了实际问题.通过上述举例可以看出,研究跳扩散市场下最优停时与随机控制的结合,可以解决更多经济中的实际问题,具有重要的理论研究及指导意义.

参考文献:

[1] MA J.On the principle of smooth fit for a class of singular stochastic control problems for diffusions[J].SIAM Journal on Control and Optimization,1992(30):975-999.

[2] 郭文旌.M-V 最优投资组合选择与最优投资消费决策[D].西安:西安电子科技大学,2003.

[3] 柏立华.随机控制理论在金融和保险中的应用[D].天津:南开大学,2009.

[4] 于洋.一类带停时的奇异性随机控制问题之研究[J].应用数学报,2008,21(2):326-330.

[5] 于洋.一类带停时的奇异性随机控制问题的研究[D].北京:北京交通大学,2011.

[6] 丁灯.关于带跳的反射扩散过程的随机最优控制问题[J].应用数学和力学,2000,21(9): 973-983.

[7] 史敬涛.带泊松跳跃的正倒向随机最优控制理论及其应用[D].济南:山东大学,2009.

[8] 丁莹.用随机极大值原理解跳跃-扩散过程的最优投资消费问题[D].兰州:兰州大学,2011.

Combination of Optimal Stop and Stochastic Control of Jump Diffusion and Its Application

ZHAO Ting-Ting, WANG Zi-Ting, ZHANG Hui

(School of Science, China University of Petroleum (East China), Shandong Qingdao 266580, China)

Abstract: Based on stochastic analysis knowledge and optimal control theory, by combining dynamic programming theorem and HJB equation, this paper adds “control” and “stop” on the basis of general stochastic control model, discusses investment issue in the combination of optimal stop and stochastic control under jump diffusion market, sets up a model for the solution, and finally uses a example to illustrate how optimal stop combines stochastic control in economics.

Key words: jump diffusion; optimal stop; stochastic control; HJB equation

责任编辑:代小红