第 30 卷第 8 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2013 年 8 月
Vol. 30 NO.8 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Aug.2013

文章编号:1672-058X(2013)08-0004-04

卡尔达诺几何证明的构造性

王 露 云
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘 要:为分析与探索《大术》中几何证明的特点,对《大术》第 13 章中三次幂加上常数等于一次项方程解法法则的证明原文运用简单易懂的数学表达式作以说明;基于对此法则的证明,分析了卡尔达诺几何证明构造性特点,总结了卡尔达诺的构造思路.

关键词:卡尔达诺;《大术》;几何证明;构造性
中图分类号:O11 **文献标志码:**A

1 卡尔达诺与《大术》简介

卡尔达诺 G.(Cardano,Girolamo),1501 年 9 月 24 日生于意大利帕维亚(Pavia);1576 年 9 月 21 日卒于罗马,主要成就在数学、物理、医学方面.卡尔达诺姓名的英文拼法是 Cardan,Jerome,译为“卡当”,常以此通用.他一生写过 200 多本著作,其中影响最为深远的当属其代数学著作《大术》(Artis magnae sive de regulis algebraicis).虽然卡尔达诺最早是从尼古拉·塔塔利亚(Niccolo Tartaglia, 1499-1557 年)那里得到了基本三次方程的解法,但是他在《大术》中不但把这种解法推广到一般类型的三次方程,而且为它们提供了几何证明,这代表了他在三次方程解法方面的独特贡献[1-2].

《大术》首次记载了三次方程和四次方程的代数解法,构造了求高次方程近似根的线性插值算法[3],并首次引入了复数.此外,书中还包含诸如方程的变换等很多其他内容[4],是数学史上的一座里程碑,也是文艺复兴时期的标志性著作.全书共计 40 章,既是当时代数学知识的总结,也包含了卡尔达诺及其学生费拉里(Lodovico Ferrari,1522-1565)的许多创新.在语言方面,该书使用了一套比较成功的数学缩写符号,可以看作是文辞代数的典范.

2 三次幂加上常数等于一次项方程解法法则的证明及其构造性特点分析

《大术》的几何证明体现了当时的数学传统.文艺复兴时期的代数学还没有完全独立,需要通过几何证明来展示其合理性[5].不过,卡尔达诺已经认识到几何证明在代数学中的地位,即“证明是为了增强理解”[6].《大术》这本书的一个显著特点是卡尔达诺以法则的形式给出结论,但对推理过程则经常避而不谈,或者仅给出简单的暗示.因此,揭示这些法则的数学依据就成为数学史研究者的一项重要工作.这不仅是为了更好

收稿日期:2013-03-31;**修回日期:**2013-04-24.
作者简介:王露云(1988-),女,陕西宝鸡人,硕士研究生,从事经济系统分析研究.

的理解法则本身,而且有助于揭示卡尔达诺的数学思想.此处将以《大术》第 13 章三次幂加上常数等于一次项方程解法法则的证明为研究对象,揭示其构造性特点.

2.1　法则的证明

在《大术》第 13 章中,卡尔达诺给出了三次幂加上常数等于一次项(即:$x^3+c=ax$)的方程的解法并叙述了他的两条法则及其证明.在这里他并没有直接给出 x 的算术表达式,而是给出了方 $x^3+c=ax$ 与方程 $y^3=ay+c$ 的正根之间的关系以及方程 $x^3+c=ax$ 的两个正根之间的关系.这两条法则及其证明如下:

法则 1　当三次幂加上常数等于一次项时,求出三次幂等于该一次项加上同一个常数的方程的根.取它的一半的平方的 3 倍,再用一次项系数减去这个结果,然后用三次幂等于一次项加上常数的方程的根的一半加上或减去所得之差的平方根,即得三次幂加上常数等于一次项的方程的根[6].

用公式可表示为:对 $x^3+c=ax$,若 $y^3=ay+c$ 的正根为 y,则 $x_{1,2}=\dfrac{y}{2}\pm\sqrt{a-\dfrac{3}{4}y^2}$.

法则 2　把较大根的一半平方,用所得结果乘以 3,再用一次项系数减去这个乘积,则所得之差的平方根减去较大的根的一半就是所求的根[6].

用公式可表示为:设方程 $x^3+c=ax$ 的两个正根为 x_1 和 x_2,并且 x_1 已知,则 $x_2=\sqrt{a-3(\dfrac{x_1}{2})^2}-\dfrac{x_1}{2}$.

第 1 条法则的证明可以简述如下:

证明 1　如图 1 所示,对正方形 AB 与 GK(注:这里用处于同一对角线上两个顶点的字母来表示正方形.另外,为了与线段进行区别,将正方形面积记 S_{AB} 与 S_{GK}),设 $S_{AB}=a$,常数 $F=c$, $GH^3=a\cdot GH+c$,$S_{HL}=\dfrac{1}{4}S_{GK}$,$S_{GL}=S_{AD}$,$CE=\sqrt{S_{BC}}$,$KM=\dfrac{1}{2}HK$,$MN=CE$.

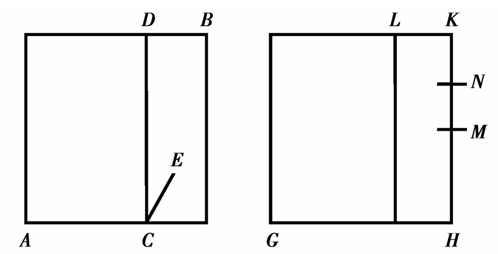

图 1　正方形 AB,GK

因为 $S_{AB}=S_{AD}+S_{BC}=S_{GL}+CE^2=3HM^2+MN^2$

根据《几何原本》Ⅱ.4 可知

$$3HM^2+MN^2-HN^2=3HM^2+MN^2-(HM+MN)^2=$$
$$2HM(HM-MN)=2HM\cdot KN=HK\cdot KN$$
$$HN^3=HN\cdot HN^2=HN\cdot(S_{AB}-HK\cdot KN)$$

因为　$GH^3=HK\cdot HK^2=S_{AB}\cdot HK\cdot N+c$,$HM^2-MN^2=KN\cdot HN$,且有 $c=HK\cdot(S_{GK}-S_{AB})=HK\cdot(S_{HL}-S_{BC})=HK\cdot(HM^2-MN^2)=HK\cdot KN\cdot HN$,所以 $HN^3+c=HN\cdot(S_{AB}-HK\cdot KN)+HK\cdot KN\cdot HN=S_{AB}\cdot HN$.因此,$HN$ 是未知量的值.

类似地,因为

$$c=HK\cdot KN\cdot HN,S_{AB}=HM^2+KM^2+MN^2+KM\cdot HM$$
$$S_{AB}-KN^2=3HM^2+MN^2-(HK-HN)^2=2HK\cdot HN-HN^2-(HM^2-MN^2)=$$
$$2HK\cdot HN-(HN^2+HN\cdot KN)=2HK\cdot HN-HK\cdot HN=HK\cdot HN$$

所以 $KN^3+c=KN^3+KN\cdot(HK\cdot HN)=KN\cdot(KN^2+HK\cdot HN)=S_{AB}\cdot KN$,因此,$KN$ 也是未知量的值.由证明不难看出,$HN+KN=GH$.

第 2 条法则的证明可以简述如下:

证明 2 如图 2 所示.方程为 $x^3+c=ax$,对正方形 AC 和 EG,设 $c=AD\cdot S_{AC}$,$a=AD^2+S_{AC}$,则有 $AD^3+c=a\cdot AD$,即 AD 是方程的一个根.现在来寻找方程的另一个根.取 FH,并使 $(FH+\frac{AD}{2})^2=S_{AC}+(\frac{AD}{2})^2$,且 $S_{EG}+FH^2=S_{AC}+AD^2$.

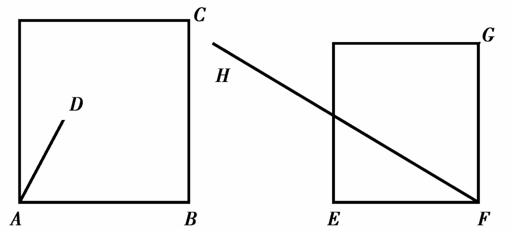

图 2 正方形 AC,EG

根据《几何原本》Ⅱ.4 可知

$$S_{AC}=FH^2+2(FH\cdot\frac{AD}{2})=FH\cdot(FH+AD)$$

所以 $S_{AC}+AD^2+FH\cdot AD=S_{EG}+FH^2+FH\cdot AD=S_{EG}+S_{AC}$,于是可得 $S_{EG}=AD\cdot(FH+AD)$.

因此 $FH:AD=S_{AC}:S_{EG}$,即 $FH\cdot S_{EG}=AD\cdot S_{AC}=c$,而 $S_{EG}+FH^2=S_{AC}+AD^2=a$,所以 $FH^3+c=a\cdot FH$,即 FH 是方程的另一个根.

2.2 构造性特点分析

以上两个证明在《大术》中很具有代表性.关于证明与法则的来源,卡尔达诺并没有做出说明.从中可以看出,卡尔达诺找到这些几何证明的思路是以代数分析为基础的.

法则 1 的证明思路为:设 $GH=y=2KM$,常数 $F=c$,$S_{AB}=a$,$y^3=ay+c$,$S_{HL}=\frac{y^2}{4}$,$S_{AD}=S_{GL}=\frac{3y^2}{4}$,$S_{BC}=a-\frac{3y^2}{4}$,$CE=MN=\sqrt{a-\frac{3y^2}{4}}$,$HN=\frac{y}{2}+\sqrt{a-\frac{3y^2}{4}}=x_1$,$KN=\frac{y}{2}-\sqrt{a-\frac{3y^2}{4}}=x_2$.卡尔达诺要证明 $x_{1,2}=\frac{y}{2}\pm\sqrt{a-\frac{3y^2}{4}}$,即 $x_{1,2}^3+c=ax_{1,2}$.对 x_1,卡尔达诺首先证明 $a-x_1^2=\frac{3y^2}{4}+(\sqrt{a-\frac{3y^2}{4}})^2-(\frac{y}{2}+\sqrt{a-\frac{3y^2}{4}})^2=y\cdot(\frac{y}{2}-\sqrt{a-\frac{3y^2}{4}})=yx_2$,$y^2-a=\frac{y^2}{4}-(\sqrt{a-\frac{3y^2}{4}})^2=x_1x_2$,由此即得 $c=y(y^2-a)=yx_1x_2=x_1(a-x_1^2)$,即 $x_1^3+c=ax_1$.对 x_2,卡尔达诺首先证 $a-x_2^2=a-(y-x_1)^2=2yx_1-x_1^2-(y^2-a)=2yx_1-x_1^2-x_1x_2=2yx_1-x_1y=yx_1$,由此即得 $x_2^3+c=x_2^3+yx_1x_2=(x_2^2+yx_1)x_2=ax_2$.分析这个证明的思路可知,作图中平分 HK 和取 HL 都是为了构造 $p=MN$,显然卡尔达诺在证明之前已经知道法则 13.1,但是他并未解释其推理过程,对此可如下分析.将 $x^3+c=ax$ 和 $y^3=ay+c$ 联立得 $x^3+c+y^3=ax+ay+c$,即 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=a(x+y)$,即 $x^2+y^2-a=yx$,解得 $x_{1,2}=\frac{y}{2}\pm\sqrt{a-3(\frac{y}{2})^2}$.

第 2 个证明的思路为:设 $AD=x_1$,$x_1^3+c=ax_1$,$AB=p$,$EF=q$,$c=x_1p^2$,$FH=x_2$,$a=x_1^2+p^2=q^2+x_2^2$,$(\frac{x_1}{2}+x_2)^2=p^2+(\frac{x_1}{2})^2$,欲证 $x_2^3+c=ax_2$,卡尔达诺先后得到 $p^2=x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)x_2$,$q^2=x_1x_2+x_1^2=(x_1+x_2)x_1$,$x_2:x_1=p^2:q^2$,$x_2q^2=x_1p^2=c$,$x_2^3+c=x_2^3+x_2q^2=x_2(x_2^2+q^2)=ax_2$.在这个证明中,最后一个假设显然是分析的结果,但卡尔达诺未作解释,对此可如下分析.设 $y^3=ay+c$ 的正根为 y,如前可得 $y=x_1+x_2$,$x_1^2+y^2-a=yx_1$,代入可得 $x_1^2+(x_1+x_2)^2-a=(x_1+x_2)x_1$,即 $x_2^2+x_1x_2=a-x_1^2=p^2$,配方即得 $(\frac{x_1}{2}+x_2)^2=p^2+(\frac{x_1}{2})^2=a-\frac{3x_1^2}{4}$.

3 结　论

由于在当时卡尔达诺没有使用数学符号,其证明过程主要是以文字叙述为主,显得冗长繁琐,此处的一项主要工作是将其证明用现代数学语言加以论述,使得其证明过程简单明了,通俗易懂.另一方面, 此处通过对《大术》第 13 章三次幂加上常数等于一次项方程法则的证明过程分析,说明了其构造性特点,总结了其构造性思路.由此可得,虽然卡尔达诺的证明在形式上属于综合几何,但是卡尔达诺的关键假设其实是通过分析得来的,因此其证明从本质上来说是构造性的证明.

参考文献:

[1] 李文林.数学史概论[M].北京:高等教育出版社,2003

[2] KLINE M.古今数学思想:第 1 册[M].张理京,张锦炎,江泽涵,译.上海:上海科学技术出版社,2002

[3] 赵继伟,杨宝山.卡尔达诺的“黄金法则”[J].西北大学学报:自然科学版,2005,35(3):370-372

[4] 赵继伟.卡尔达诺关于四次方程特殊法则的构造原理[J].自然科学史研究,2008,27(3):325-336

[5] 赵继伟.卡尔达诺的构造性几何证明[J].陕西师范大学学报:自然科学版,2008,36(6):14-18

[6] GIROLAMO,CARDANO.Ars magnae[M].New York:Dover Publication,1993

The Construction of Cardano Geometry Proof

WANG Lu-yun

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract:In order to analyze and explore the characteristics of geometry proof in Artis Magnae, the original proof for the solving principle to that three power plus constant are equal to simple equation in the Thirteenth Chapter of Artis Magnae is illustrated by understandable mathematical expression, based on the proof for this principle, the constructive characteristics for Cardano geometry proof are analyzed and the train of thought for Cardano construction is summarized.

Key words: Cardano;Artis Magnae;geometry proof;construction

责任编辑:李翠薇