文章编号:1672-058X(2013)07-0024-04

破产概率更新方程的新推导方法

韩　雷

(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘　要:更新方程是得到破产概率的核心等式,通常是对盈余过程和破产概率的数学解析而得到。考虑经典风险和常利率风险两种模型,给出更新方程的新的推导方法:破产前瞬时盈余瑕疵密度正则化后即为破产概率;当索赔为指数分布时,研究了破产赤字和破产前瞬时盈余瑕疵密度正则化后的独立性。

关键词:更新方程;正则化; 破产概率

中图分类号:O221.2　　**文献标志码:**A

许多学者深入研究了经典风险模型和常利率风险模型,并提出了更符合实际情况的扩展模型。Dufresne 和 Gerber(1991)[1]研究了经典风险模型存在随机扰动因素的情况,而随机扰动因子可以理解为保费收入和未来投资环境等不确定的变化。Cai 和 Yang(2005)[2]研究了带利率下随机扰动复合泊松风险模型。Esther Frostig(2010)[3]研究了带红利的风险模型。

近些年,许多学者越来越关注破产前的情况。破产赤字和破产前瞬时盈余的研究使破产概率富含更多的保险意义,而 EDP 函数(expected discount penalty function)更成为风险理论炙手可热的研究方向。Dickson(1992)[4]研究了破产赤字及破产前瞬时盈余的密度函数,给出了 Dickson 公式。Gerber 和 Landry(1998)[5],Gerber 和 Shiu(1998)[6]首次介绍和研究了 EDP 函数,并给出常利率下的 Dickson 公式。

更新方程是研究风险理论的核心等式。破产概率满足更新方程,具体可参考《风险理论》[7]。Gerber 和 Shiu(1998)在文章“On the Time Value of Ruin”中得到 EDP 函数也满足瑕疵的更新方程。但文章中定义的破产函数的密度均具有瑕疵性,破产赤字和破产前瞬时盈余分布关系都是值得考虑的问题。而后的许多文章从更新方程的角度出发,利用不同的数学理论技巧对此进行了大量的研究。H. Schmidli(2010)[8]对 EDP 函数测度变换,Albrecher[9]采用代数算子方法。

在 Gerber 和 Shiu(1998)得到的结果基础上,从破产赤字和破产瞬时盈余的角度,研究经典和常利率风险模型破产概率满足的更新方程。

1　模型介绍和相关引理

设保险公司在时刻 $t\geqslant 0$ 的盈余为 $U(t)$,如下式:

$$U(t)=u+ct-\sum_{k=1}^{N(t)}X_k,t>0 \tag{1}$$

其中 $u\geqslant 0$ 表示保险公司的初始资产,为常数;$c>0$ 是单位时间保费收入(保费率);$X_k(k\geqslant 1)$表示第 k 次索赔额,$N(t)$则表示到时刻 t 发生的索赔次数。

收稿日期:2013-03-21;**修回日期:**2013-04-07.

作者简介:韩雷(1988-) ,男,安徽利辛人,硕士研究生,从事破产概率研究.

设$\{X_k:k\geqslant 1\}$是恒正的,独立同分布的随机变量序列。记:

$$P(x)=\Pr(X_1\leqslant x),\ \forall x\geqslant 0$$

$$p_1=E[X_1]=\int_0^{\infty}[1-P(x)]\mathrm{d}x;$$

论文假设索赔的分布函数可微:

$$P'(x)=p(x)$$

$\{N(t):t\geqslant 0\}$是以$\lambda(\lambda>0)$为参数的 Poisson 过程;$\{X_k:k\geqslant 1\}$与$\{N(t):t\geqslant 0\}$相互独立。$c=(1+\theta)\lambda p_1$,其中$\theta>0$,称为相对安全负载。

定理 1.1　经典风险模型破产概率满足:

$$\psi(0)=\frac{1}{1+\theta}=\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}[1-P(x)]\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{c}p_1 \tag{2}$$

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}[1-P(x)]\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{c}\int_0^{u}\psi(u-x)[1-P(x)]\mathrm{d}x \tag{3}$$

索赔额变量服从均值为$1/\alpha$的指数分布时,则破产概率为:

$$\psi(u)=\frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\alpha\theta}{1+\theta^{u}}},u\geqslant 0 \tag{4}$$

记$f(x,y,t|u)$为破产赤字$U(T-)$,破产前瞬时盈余$|U(T)|$和破产时刻T瑕疵联合密度函数,其中$U(0)=u\geqslant 0$。则:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(x,y,t|u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=\Pr[T<\infty|U(0)=u]=\psi(u) \tag{5}$$

利用条件概率公式进行简单的变换可得到:

引理 1.1　破产赤字和破产前瞬时盈余的联合密度函数满足等式:

$$f(x,y|u)=f(x|u)p(x+y)/[1-P(x)] \tag{6}$$

引理 1.2　经典风险过程破产赤字的密度函数为(Dickson's 公式):

$$f(x|u)=\begin{cases}f(x|0)\dfrac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)},x>u\geqslant 0\\ f(x|0)\dfrac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)},0<x\leqslant u\end{cases}$$

其中

$$f(x|0)=\lambda c^{-1}[1-P(x)],x>0。 \tag{7}$$

常利率风险过程破产赤字的密度函数为(推广的 Dickson's 公式)

$$f(x|u)=\begin{cases}f(x|0)\dfrac{e^{\rho u}-\psi(u)}{1-\psi(0)},x>u\geqslant 0\\ f(x|0)\dfrac{e^{\rho x}\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)},0<x\leqslant u\end{cases}$$

其中

$$f(x|0)=\lambda c^{-1}e^{-\rho x}[1-P(x)],x>0 \tag{8}$$

2　更新方程新的推导方法

破产赤字$U(T-)$和破产前瞬时盈余$|U(T)|$的关系在许多文章中并没有被充分考虑,为此给出下述定理。

定理 2.1　索赔为指数分布时,破产赤字 $U(T-)$ 和破产前瞬时盈余 $|U(T)|$ 的瑕疵密度函数归一化后是相互独立的。

证明　定理等价于:

$$\psi(u)f(x,y|u)=f(x|u)g(y|u) \tag{9}$$

将等式(5)代入可知:

$$\psi(u)p(x+y)/[1-P(x)]=g(y|u) \tag{10}$$

利用文献[6]的结果,可以验证上式成立。证毕。

在等式(10)的基础上给出经典风险过程破产概率满足更新方程式的新推导方法。

证明　注意到等式(10)的右端为 $|U(T)|$ 的概率密度函数,也可由破产前瞬时盈余 $U(T-)$ 和破产赤字 $|U(T)|$ 联合密度函数 $f(x,y|u)$ 对 x 在 0 到无穷大上的积分求出,由 Dickson 公式和(6)可得:

$$g(y|u)=\int_0^\infty f(x,y|u)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}\int_u^\infty f(x,y|0)\mathrm{d}x+\frac{1}{1-\psi(0)}\int_0^u[\psi(u-x)-\psi(u)]f(x,y|0)\mathrm{d}x$$

将等式右端第二项减 1 和加 1 后与第一项合并可得:

$$g(y|u)=\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}\int_0^\infty f(x,y|0)\mathrm{d}x+\frac{1}{1-\psi(0)}\int_0^u[\psi(u-x)-1]f(x,y|0)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}g(y|0)+\frac{1}{1-\psi(0)}\int_0^u[\psi(u-x)-1]f(x,y|0)\mathrm{d}x \tag{11}$$

将式(9)代入式(10)中,并在等式两端对 y 在 0 到正无穷大积分可得:

$$\frac{\psi(u)}{1-P(x)}\int_0^\infty p(x+y)\mathrm{d}y=\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}\int_0^\infty g(y|0)\mathrm{d}y+\frac{1}{1-\psi(0)}\int_0^\infty\int_0^u[\psi(u-x)-1]f(x,y|0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由

$$\int_0^\infty p(x+y)\mathrm{d}y=[1-P(x)]$$

且 $g(y|0)$ 是初始盈余为 0 时 $|U(T)|$ 的概率密度函数,在全空间 $[0,\infty)$ 上积分为 $\psi(0)$ 可得:

$$\psi(u)=\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}+\frac{1}{1-\psi(0)}\int_0^\infty\int_0^u[\psi(u-x)-1]f(x,y|0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

等式两端同乘以 $1-\psi(0)$,化简得:

$$\psi(u)-\psi(0)=\int_0^u[\psi(u-x)-1]f(x|0)\mathrm{d}x$$

将等式(7)代入可得:

$$\psi(u)-\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^u[\psi(u-x)-1][1-P(x)]\mathrm{d}x$$

注意到(2)则上式化简可得:

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty[1-P(x)]\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\psi(u-x)[1-P(x)]\mathrm{d}x$$

证毕。

从破产赤字 $U(T-)$,破产前瞬时盈余 $|U(T)|$ 和破产时刻 T 瑕疵联合密度函数定义(5)可以看出,破产前瞬时盈余瑕疵密度的正则化即为破产概率,由此给出常利率风险模型破产概率满足的更新方程。

定理 2.2 常利率风险模型的破产概率满足如下更新方程:

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}e^{\rho(u-x)}[1-P(x)]\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\psi(u-x)[1-P(x)]\mathrm{d}x \tag{12}$$

其中 ρ 为常利率。

证明 同理由推广的 Dickson 公式和等式(6)可知:

$$g(y|u)=\int_0^{\infty}f(x,y|u)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{e^{\rho u}-\psi(u)}{1-\psi(0)}\int_u^{\infty}f(x,y|0)\mathrm{d}x+\frac{1}{1-\psi(0)}\int_0^u e^{\rho x}[\psi(u-x)-\psi(u)]f(x,y|0)\mathrm{d}x$$

注意到等式(8),将其带入到式(10)中并在等式两端对 y 在 0 到正无穷大积分可得:

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\int_0^u e^{-\rho x}[1-P(x)]\frac{e^{\rho x}\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)}\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}e^{-\rho x}[1-P(x)]\frac{e^{\rho u}-\psi(u)}{1-\psi(0)}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{\lambda}{c(1-\psi(0))}\left\{\int_0^u[\psi(u-x)-e^{-\rho x}\psi(u)][1-P(x)]\mathrm{d}x+\int_u^{\infty}[e^{\rho(u-x)}-e^{-\rho x}\psi(u)][1-P(x)]\mathrm{d}x\right\}=$$

$$\frac{\lambda}{c(1-\psi(0))}\left\{\int_0^u\psi(u-x)[1-P(x)]+\int_u^{\infty}e^{\rho(u-x)}[1-P(x)]\mathrm{d}x-\int_0^{\infty}e^{-\rho x}\psi(u)[1-P(x)]\mathrm{d}x\right\}$$

由常利率风险模型在初始盈余进为 0 的破产概率为:

$$\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}e^{-\rho x}[1-P(x)]\mathrm{d}x$$

可得到:

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}e^{\rho(u-x)}[1-P(x)]\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\psi(u-x)[1-P(x)]\mathrm{d}x$$

证毕。

参考文献:

[1] DUFRESNE F , GERBER H U. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion [J]. Insurance: Mathematics and Economics 1991(10):51-59

[2] CAI J, YANG H L. Ruin in the perturbed compound Poisson risk process under interest force [J]. Advances in Applied Probability,2005,37:819-835

[3] FROSTIG E. Asymptotic analysis of a risk process with high dividend barrier [J]. Insurance: Mathematics and Economics 2010, 47:21-26

[4] DICKSON D C M. On the distribution of surplus prior to ruin [J].Insurance: Mathematics and Economics ,1992,11:191-207

[5] GERBER H U, LANDRY B. On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1998,22:263-276

[6] BERBER H U , SHIU S W. On the time value of ruin[J]. North American Actuarial Journal, 1998(1): 48-78

[7] 吴岚,王燕.风险理论[M].北京:中国财政经济出版社,2006

[8] SCHMIDLI H. On the Gerber-Shiu function and change of measure [J].Insurance: Mathematics and Economics 2010,46:3-11

[9] ALBRECHER H. An algebraic operator approach to the analysis of Gerber-Shui functions [J]. Insurance: Mathematics and Economics,2010,46:42-51

(下转第 56 页)