文章编号:1672-058X(2013)07-0016-03

不等式证明的三种方法*

曾　静

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要: 不等式证明是数学分析教学过程中的一类重要题型,结合各章节与不等式证明相关的知识,对已有方法进行归纳总结,以促进和加强初学者对不等式证明方法的了解和掌握.

关键词: 不等式;函数单调性;中值定理;函数凸性

中图分类号: O122.3　　**文献标志码:** A

1　函数单调性法

对不等式证明是教学以及考研过程中常常遇到的题型[1-3],此处对不等式证明的已有方法进行归纳总结,以促进和加强初学者对不等式证明方法的了解和掌握.据此,总结出 3 种方法:函数单调性法,函数凸性法,中值定理法.

例 1　证明 $x>\sin x>\frac{2}{\pi}x(0<x<\frac{\pi}{2})$.

证明　对不等式左边 $x>\sin x(0<x<\frac{\pi}{2})$ 进行变形,可得 $x-\sin x>0(0<x<\frac{\pi}{2})$.令 $f(x)=x-\sin x$,显然 $f(0)=0$,故要证 $x-\sin x>0(0<x<\frac{\pi}{2})$,即证 $f(x)>f(0)$.要证明一个函数在一点处的值大于另外一点处的值,首先想到证明函数的单调性.下面证明 $f(x)$ 的单调性. 显然,$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内是连续可导的,且 $f'(x)=1-\cos x$,所以当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$f'(x)=1-\cos x>0$.因此,$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内严格单调递增,$f(x)>f(0)$,求证成立.

对不等式右边 $\sin x>\frac{2}{\pi}x(0<x<\frac{\pi}{2})$ 进行变形得 $\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}(0<x<\frac{\pi}{2})$.令 $g(x)=\frac{\sin x}{x}$,显然 $g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$,故要证 $\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}(0<x<\frac{\pi}{2})$,即证 $g(x)>g(\frac{\pi}{2})$. 同样要证 $g(x)$ 是单调的. 显然,$g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内是连续可导的,且 $g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.令 $h(x)=x\cos x-\sin x$,则 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内是连续可导的,且 $h'(x)=-x\sin x$.所以当

收稿日期:2013-03-21;修回日期:2013-04-09.

* 基金项目:国家自然科学基金(11101453);重庆市自然科学基金(cstc2012jjA00038);重庆工商大学科研启动项目(2012-56-04).

作者简介:曾静(1983-),女,四川彭州人,讲师,博士研究生,从事最优化理论研究.

$0<x<\frac{\pi}{2}$时,$h'(x)=-x\sin x<0$,从而 $h(x)=x\cos x-\sin x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$内是单调递减的,即有 $0=h(0)>h(x)=x\cos x-\sin x(0<x<\frac{\pi}{2})$.因此,$g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$,故 $g(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$内严格单调递减,从而有 $g(x)>g(\frac{\pi}{2})(0<x<\frac{\pi}{2})$,求证成立.

分析:这种方法首先利用原有不等式,通过变形构造一个新的不等式,其次将新的不等式一端看作一个函数,从而新的不等式的两端变成该函数的两个值,再证明该函数是单调的,最后得出证明结果.

然而,构造的函数,求一次导不一定能看出其单调性,稍不耐心就会放弃计算.

2 函数凸性法

仍然就例 1 中不等式右边,介绍函数凸性法.为方便起见,将例 1 中不等式的右边重写一遍.

例 1′ 证明 $\sin x>\frac{2}{\pi}x(0<x<\frac{\pi}{2})$.

证明 对不等式变形得,$\sin x-\frac{2}{\pi}x>0(0<x<\frac{\pi}{2})$.令 $F(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$,则 $F''(x)=-\sin x$.从而当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时,$F''(x)<0$,$F(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上为上凸函数.任取 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,则有 $0<1-\frac{2}{\pi}x<1$,从而 $F(x)=F((1-\frac{2}{\pi}x)\times0+(\frac{2}{\pi}x)\frac{\pi}{2})$.又因为 $F(0)=0$,$F(\frac{\pi}{2})=0$,根据 $F(x)$的上凸性可知,

$$F(x)=F((1-\frac{2}{\pi}x)\times0+(\frac{2}{\pi}x)\frac{\pi}{2})>(1-\frac{2}{\pi}x)F(0)+(\frac{2}{\pi}x)F(\frac{\pi}{2})=0(0<x<\frac{\pi}{2})$$

从而,$F(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x>0(0<x<\frac{\pi}{2})$.

分析:这种方法利用原有不等式,通过变形构造一个函数,证明该函数是上凸的,从而证明不等式成立.

3 中值定理法

例 2 证明$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)(x>0)$.

证明 令 $f(t)=\ln(1+t)(t>0)$.任取 $x>0$,则 $f(t)$在$[0,x]$上连续,在$(0,x)$内可导.根据拉格朗日中值定理可知,

$$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln1=\frac{1}{1+\xi}((1+x)-1)=\frac{x}{1+\xi}(0<\xi<x)$$

又因为 $0<\xi<x$,所以 $1<1+\xi<1+x$,从而 $1>\frac{1}{1+\xi}>\frac{1}{1+x}$. 因为 $x>0$,所以 $x>\frac{x}{1+\xi}>\frac{x}{1+x}$. 根据 $\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}(0<\xi<x)$可知,$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)(x>0)$.

分析:微分中值定理是不等式证明的一种常用的方法.当证明的不等式中,出现的项有互为导数的关系时,常使用该方法.

4 小 结

常用的不等式证明方法有以上3种,涉及的知识点有函数的单调性、凸性及中值定理,当遇到不等式证明的时候,灵活使用3种方法之一,即可简化证明过程,达到求证目的.

参考文献:

[1] 欧阳光中,朱学炎,金福临,等. 数学分析[M].3版. 北京:高等教育出版社,2007

[2] 邓乐斌. 数学分析的理论、方法与技巧[M].武汉:华中科技大学出版社,2005

[3] 费时龙,张增林. 一个不等式及其应用[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27(6):554-557

Three Methods for Proofs of Inequalities

ZENG Jing

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The proofs of inequalities are a kind of important topics in the process of mathematical analysis teaching, by combining the related knowledge on the proofs of inequalities in all chapters and by generalizing the existed methods for the proofs of inequalities, three methods such as function monotonicity method, mean value theorem method and function convexity method are summarized in order to boost and enhance initial learners to understand and master the methods for proofs of the inequalities.

Key words: inequality; function monotonicity; mean value theorem; function convexity

责任编辑:李翠薇