文章编号:1672 -058X(2013)04 -0017 -02

次正交矩阵的几个充要条件

郭　华

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:目前对次正交矩阵的研究文章已有不少,但学者们基本上都是从运算性质以及它与其他特殊矩阵的关系上进行的.此处从矩阵元素的结构上研究了次正交矩阵,给出了次正交矩阵的 3 个充分必要条件.

关键词:次转置矩阵;次正交矩阵;伴随矩阵;代数余子式

中图分类号:O151　　**文献标志码:**A

1　预备知识

定义 1　设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})_{m\times n}$,如记 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=(\boldsymbol{b}_{ij})_{n\times m}$,其中 $\boldsymbol{b}_{ij}=\boldsymbol{a}_{m-j+1,n-i+1}$　$(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$,即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{mn} & \boldsymbol{a}_{m-1,n} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{m,n-1} & \boldsymbol{a}_{m-1,n-1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m-1,1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{11} \end{pmatrix}$$

定义 2　若实数域上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为次正交矩阵.

由定义可知下列结论显然成立:

引理 1　A 为次正交矩阵的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}$.

引理 2　$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}|$.

2　三个充要条件

性质 1　n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})$ 是次正交矩阵的充要条件为

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-k+1}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

证明　当 $\boldsymbol{A}$ 为次正交矩阵时,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=\boldsymbol{E}$,即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{nn} & \boldsymbol{a}_{n-1,n} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{n,n-1} & \boldsymbol{a}_{n-1,n-1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n-1,1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{11} \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$$

由矩阵乘法和比较两端对应元素即得:

收稿日期:2012 -02 -21;**修回日期:**2012 -10 -09.

作者简介:郭华(1962-),女,重庆人,副教授,从事矩阵理论研究.

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_{i1}\boldsymbol{a}_{n-i+1,n}+\boldsymbol{a}_{i2}\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-1}+\cdots+\boldsymbol{a}_{in}\boldsymbol{a}_{n-i+1,1}=1\\ \boldsymbol{a}_{i1}\boldsymbol{a}_{n-j+1,n}+\boldsymbol{a}_{i2}\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-1}+\cdots+\boldsymbol{a}_{in}\boldsymbol{a}_{n-j+1,1}=0(i\neq j)\end{cases}$$

也即是

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-k+1}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

性质2 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶次正交矩阵当且仅当 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$,且当 $|\boldsymbol{A}|=1$ 时,有元素 $\boldsymbol{a}_{ij}$ 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$,当 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 时,有元素 $\boldsymbol{a}_{ij}$ 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$.

证明 "$\Rightarrow$":因为 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶次正交矩阵,所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=\boldsymbol{E}$,两边取行列式得 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}|=|\boldsymbol{E}|=1$,即 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}|=|\boldsymbol{A}|^2=1$,故 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$.

当 $|\boldsymbol{A}|=1$ 时,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1}\\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{nn} & \boldsymbol{a}_{n-1,n} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n}\\ \boldsymbol{a}_{n,n-1} & \boldsymbol{a}_{n-1,n-1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1,n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n-1,1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{11}\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}$ 可得:$\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$. 同样当 $|\boldsymbol{A}|=-1$,易得 $\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$.

"$\Leftarrow$":$|\boldsymbol{A}|=1,\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$ 时,与当 $|\boldsymbol{A}|=-1,\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$ 时,容易得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}$,所以 A 为次正交矩阵.

性质3 对阶数 $n\geqslant3$ 的实矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})$ 是次正交矩阵的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,并当 $|\boldsymbol{A}|>0$ 时,有 $\boldsymbol{a}_{ij}=\boldsymbol{A}_{n-i+1,n-j+1}$;$|\boldsymbol{A}|<0$ 时,有 $\boldsymbol{a}_{ij}=-\boldsymbol{A}_{n-i+1,n-j+1}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

证明 "$\Rightarrow$":注意到 $\boldsymbol{a}_{ij}=\boldsymbol{A}_{n-i+1,n-j+1}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$,$\boldsymbol{a}_{ij}=-\boldsymbol{A}_{n-i+1,n-j+1}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$,因为 $\boldsymbol{A}$ 是次正交矩阵,由性质2即知 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$,且 $|\boldsymbol{A}|=1>0$ 时,有 $\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$,即是 $\boldsymbol{a}_{ij}=\boldsymbol{A}_{n-i+1,n-j+1}$;当 $|\boldsymbol{A}|=-1<0$ 时,有 $\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$,即是 $\boldsymbol{a}_{ij}=-\boldsymbol{A}_{n-i+1,n-j+1}$,必要性得证.

"$\Leftarrow$":当 $|\boldsymbol{A}|>0,\boldsymbol{a}_{ij}=\boldsymbol{A}_{n-i+1,n-j+1}$ 时,只需证明 $|\boldsymbol{A}|=1$ 即可. 因为此时即有 $\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-i+1,n-j+1}$,于是

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1}\\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{nn} & \boldsymbol{a}_{n-1,n} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n}\\ \boldsymbol{a}_{n,n-1} & \boldsymbol{a}_{n-1,n-1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1,n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n-1,1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{11}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}$$

故有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 因为 $|\boldsymbol{A}|>0$,且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}|$,所以 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^n$,于是 $|\boldsymbol{A}|^{n-2}=1,n\geqslant3$,故 $|\boldsymbol{A}|=1$,由性质2知 A 为次正交矩阵.

当 $|\boldsymbol{A}|<0,\boldsymbol{a}_{ij}=-\boldsymbol{A}_{n-i+1,n-j+1}$,同样只需证 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 即可. 此时同样可证 $\boldsymbol{A}^{*}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}$,从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,所以 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}|=|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|^n=(-1)^n|\boldsymbol{A}|^n$,于是 $|\boldsymbol{A}|^{n-2}=(-1)^n$,故 $|\boldsymbol{A}|=-1$,由性质2知 $\boldsymbol{A}$ 为次正交矩阵.

参考文献:

[1] 袁晖坪. 次正交矩阵与次对称矩阵[J]. 西南大学学报:自然科学版,1998(2):147-151

[2] 王文慧. 关于次正交矩阵[J]. 渝州大学学报:自然科学版,1998(2):11-15

[3] 王文慧,黄沄. 次正交矩阵的几个性质[J]. 重庆教育学院学报,2000(3):51-52

[4] 刘丽萍. 次正交矩阵及其性质[J]. 山西财经大学学报,2000(22):205

[5] 郭伟 . 广义次对称矩阵及广义次正交矩阵[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2000(2):18-22

[6] 郭伟. 实次规范阵与次正交阵的进一步拓广[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2006(6):240-242

[7] 张枚. 高等代数习题选解[M]. 浙江:浙江科学技术出版社,1985

(下转第29页)