**文章编号:**1672 - 058X(2013)03 - 0032 - 03

# 全转置正交矩阵的几个性质

郭 华

(重庆工商大学 数学与统计学院 400067)

**摘 要:**给出了全转置矩阵和全转置正交矩阵的定义,从矩阵元素的结构上研究了全转置正交矩阵,给出了全转置正交矩阵的 3 个充分必要条件.

**关键词:**全转置矩阵;全转置正交矩阵;伴随矩阵;代数余子式

**中图分类号:**O151 **文献标志码:**A

## 1 预备知识

**定义 1** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix}$,将 $A$ 顺时针(或逆时针)旋转 180 度,得到的矩阵记为 $\boldsymbol{A}^O$,即 $\boldsymbol{A}^O=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{mn} & \boldsymbol{a}_{m,n-1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{m1} \\ \boldsymbol{a}_{m-1,n} & \boldsymbol{a}_{m-1,n-1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{m-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{1n} & \boldsymbol{a}_{1,n-1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{11} \end{pmatrix}$,称为 $\boldsymbol{A}$ 的全转置矩阵.

**定义 2** 若实数域上的 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^o=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为全转置正交矩阵.

由定义可知下列结论显然成立:

**引理 1** $\boldsymbol{A}$ 为全转置正交矩阵的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^O$.

**引理 2** $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵,则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^O|$.

**证明** $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{vmatrix}$,从最后一行开始依次与上一行交换,直至交换到第一行;又再将最后一行依次与上一行交换,直至交换到第二行;…;如此交换下去,共经过 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次行的交换行列式

**收稿日期:**2012 - 09 - 07;**修回日期:**2012 - 10 - 09.

**作者简介:**郭华(1962-),女,重庆人,副教授,从事矩阵理论研究.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

再对经过行交换的行列式的列进行类似处理,即经过$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$次列交换可得

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} = |A^O|$$

## 2　3 个充要条件

**性质 1**　$n$ 阶实矩阵 $A=(a_{ij})$是全转置正交矩阵的充要条件为

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{n-k+1,n-j+1} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

**证明**　当 $A$ 为全转置正交矩阵时,$AA^O=E$,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{nn} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{n-k+1,n} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{n-k+1,n-1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{n-k+1,1} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{n-k+1,n} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{n-k+1,n-1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{n-k+1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{n-k+1,n} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{n-k+1,n-1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{n-k+1,1} \end{pmatrix} = E$$

由矩阵乘法和比较两端对应元素即得:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{n-k+1,n-j+1} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

**性质 2**　$A$ 为 $n$ 阶全转置正交矩阵当且仅当$|A| = \pm 1$,且当$|A|=1$ 时,有元素 $a_{ij}$的代数余子式 $A_{ij}=$

$\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1}$,当$|\boldsymbol{A}|=-1$时,有元素$\boldsymbol{a}_{ij}$的代数余子式$\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1}$.

**证明** “⇒”:因为$\boldsymbol{A}$为$n$阶全转置正交矩阵,所以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^O=\boldsymbol{E}$,两边取行列式得$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^O|=|\boldsymbol{E}|=1$,即$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^O|=|\boldsymbol{A}|^2=1$,故$|\boldsymbol{A}|=\pm1$.

当$|\boldsymbol{A}|=1$时,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{21}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n1}\\\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{1n}&\boldsymbol{A}_{2n}&\cdots&\boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^O=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{nn}&\boldsymbol{a}_{n,n-1}&\cdots&\boldsymbol{a}_{n1}\\\boldsymbol{a}_{n-1,n}&\boldsymbol{a}_{n-1,n-1}&\cdots&\boldsymbol{a}_{n-1,1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\boldsymbol{a}_{1n}&\boldsymbol{a}_{1,n-1}&\cdots&\boldsymbol{a}_{11}\end{pmatrix}$$

由$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^O$可得:$\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1}$. 同样当$|\boldsymbol{A}|=-1$,易得$\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1}$.

“⇐”:当$|\boldsymbol{A}|=1$, $\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1}$时,与当$|\boldsymbol{A}|=-1$, $\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1}$时,容易得$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^O$,所以$\boldsymbol{A}$为全转置正交矩阵.

**性质3** 对阶数$n\geqslant3$的实矩阵,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})$是全转置正交矩阵的充要条件为$|\boldsymbol{A}|\neq0$,并当$|\boldsymbol{A}|>0$时,有$\boldsymbol{a}_{ij}=\boldsymbol{A}_{n-j+1,n-i+1}$;$|\boldsymbol{A}|<0$时,有$\boldsymbol{a}_{ij}=-\boldsymbol{A}_{n-j+1,n-i+1}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

**证明** “⇒”:注意到

$$\boldsymbol{a}_{ij}=\boldsymbol{A}_{n-j+1,n-i+1}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1},\quad \boldsymbol{a}_{ij}=-\boldsymbol{A}_{n-j+1,n-i+1}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1}$$

因为$\boldsymbol{A}$是全转置正交矩阵,由性质2即知$|\boldsymbol{A}|=\pm1$,且$|\boldsymbol{A}|=1>0$时,有$\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1}$,即$\boldsymbol{a}_{ij}=\boldsymbol{A}_{n-j+1,n-i+1}$;当$|\boldsymbol{A}|=-1<0$时,有$\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1}$,即$\boldsymbol{a}_{ij}=-\boldsymbol{A}_{n-j+1,n-i+1}$,必要性得证.

“⇐”:当$|\boldsymbol{A}|>0,\boldsymbol{a}_{ij}=\boldsymbol{A}_{n-j+1,n-i+1}$时,只需证明$|\boldsymbol{A}|=1$即可. 因为此时即有$\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{a}_{n-j+1,n-i+1}$,于是

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{21}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n1}\\\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{1n}&\boldsymbol{A}_{2n}&\cdots&\boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{nn}&\boldsymbol{a}_{n,n-1}&\cdots&\boldsymbol{a}_{n1}\\\boldsymbol{a}_{n-1,n}&\boldsymbol{a}_{n-1,n-1}&\cdots&\boldsymbol{a}_{n-1,1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\boldsymbol{a}_{1n}&\boldsymbol{a}_{1,n-1}&\cdots&\boldsymbol{a}_{11}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^O$$

故有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^O=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|E$,因为$|\boldsymbol{A}|>0$,且$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^O|$,所以$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^O|=||\boldsymbol{A}|E|=|\boldsymbol{A}|^n$,于是$|\boldsymbol{A}|^{n-2}=1$,因$n\geqslant3$,所以$|\boldsymbol{A}|=1$,由性质2知$\boldsymbol{A}$为全转置正交矩阵.

当$|\boldsymbol{A}|<0,\boldsymbol{a}_{ij}=-\boldsymbol{A}_{n-j+1,n-i+1}$,同样只需证$|\boldsymbol{A}|=-1$即可. 此时同样可证$\boldsymbol{A}*=-\boldsymbol{A}^O$,从而$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^O=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}*=-|\boldsymbol{A}|E$. 因为$|\boldsymbol{A}|\neq0$,所以$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^O|=|-|\boldsymbol{A}|E|^n=(-1)^n|\boldsymbol{A}|^n$,于是$|\boldsymbol{A}|^{n-2}=(-1)^n$故$|\boldsymbol{A}|=-1$,由性质2知$\boldsymbol{A}$为全转置正交矩阵.

**参考文献:**


[1] 许永平. 旋转矩阵的一些概念与一些结论[J]. 江苏广播大学学报,1997(2):81-84

[2] 许永平,石小平. 正交矩阵的充要条件与O-正交矩阵的性质[J]. 南京林业大学学报:自然科学版,2005(2):2-4

[3] 周素琴. 2-旋转矩阵及其性质[J]. 上海师范大学学报:自然科学版,2001(1):89-91

[4] 袁晖坪. 次正交矩阵与次对称矩阵[J]. 西南大学学报:自然科学版,1998(2):147-150

[5] 郭伟. 实次规范阵与次正交阵的进一步拓广[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2006(3):240-242

[6] 张枚. 高等代数习题选解[M]. 浙江:浙江科学技术出版社,1985


(下转第45页)