文章编号:1672-058X(2013)03-0029-03

次迹为零的矩阵及其性质

刘少强
(漳州师范学院 数学与信息技术系,福建 漳州 363000)

摘　要:给出次迹为零的矩阵的概念,从矩阵的次相似、次半正定、Kronecker 与 Hadamard 积、矩阵函数等角度来刻画次迹为零的矩阵的一些性质,给出了这类矩阵的几个必要条件,并讨论它在矩阵分解中的应用.

关键词:矩阵的次迹;次迹为零的矩阵;零矩阵
中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A

关于迹为零的矩阵,文献[1]给出了若干判断准则,同时讨论了在矩阵分解中的应用.此处在文献[2]给出矩阵的次迹定义基础上,给出次迹为零的矩阵的概念,对比迹为零的矩阵的相关性质,对这类次迹为零的特殊矩阵进行探讨,得到一些新的结果.

1　预备知识

用 I 表示 n 阶单位矩阵,用 J 表示 n 阶次单位矩阵,即次对角上的元素全为1,其余各位置的元素为0的矩阵.用 $|A|$, $\|A\|_F$, A^T, A^{ST}, $A^{(*)}$ 分别表示 A 的行列式、范数、转置矩阵、次转置矩阵、共轭次转置矩阵.用 $A\otimes B$, $A*B$ 分别表示 A 与 B 的 Kronecker 积、Hadamard 积.用 $\mathrm{sdiag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 表示次对角元素为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的次对角阵.若无特别说明,此处中所指的数均为实数,矩阵均为 n 阶实矩阵.

容易推得 $J^2=JJ=I$, $JQ^TJ=Q^{ST}$.

引理 1[1]　A 是 n 阶矩阵,$\mathrm{tr}\,A=0$ 的充要条件是 A 相似于一个对角元素均为零的 n 阶矩阵.

定义 1[2]　设 A 为 n 阶矩阵,称其次对角元素之和为 A 的次迹,记作 $\mathrm{str}\,A$,即 $\mathrm{str}\,A=\sum_{i=1}^{n}a_{i,n-i+1}$.

定义 2　设 A 为 n 阶矩阵,若 $\mathrm{str}\,A=0$,则称 A 为次迹为零的矩阵.

定义 3[3]　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$,记

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

为 A 的 Frobenius 范数或欧氏范数.

性质 1[2]　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的次特征值,则 $\mathrm{str}\,A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_n$.

性质 2[2]　设 $A\in C^{n\times n}$,则 $\mathrm{str}\,(AJA^{(*)})=\mathrm{str}\,(A^{(*)}JA)=\|A\|_F^2$.

定义 4[4]　设 A 为 n 阶次对称阵,若 $\forall\,0\neq X\in\mathbf{R}^n$,有 $X^{ST}AX\geqslant 0\in\mathbf{R}^n$,则称 A 为次对称次半正定阵.

收稿日期:2012-10-10;**修回日期**:2012-11-01.
作者简介:刘少强(1983-),男,广东汕头人,硕士研究生,从事图论及其应用研究.

定义 5[5] 若 n 阶矩阵 A 满足 $JAJ = A^{\mathrm{T}}$,则称 A 为次对称矩阵;若 A 既是对称矩阵又是次对称矩阵,则称 A 为双对称矩阵.

推论 若 A 为双对称矩阵,有 $JAJ = A$.

特别地,当 $n = 2k, k \in N$ 时,有 $(JA)^n = A^n$.

定义 6[6] 设 $A \in C^{m \times n}$, $0 \neq X \in C^n$,如果纯量 λ 满足方程 $AX = \lambda JX$,则称 λ 为 A 的次特征值.

引理 2[7] λ 为 A 的次特征值当且仅当 λ 为 JA 的特征值.

引理 3[8] A 为 n 阶实次对称矩阵的充要条件是存在 n 阶正交矩阵 P,使得:

$$P^{\mathrm{ST}}AP = \begin{pmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的次特征值.

定义 7 设 A、B 为 n 阶实矩阵,若存在次可逆矩阵 P,使得 $P^{(-1)}AP = B$,则称 B 与 A 次相似,其中 $P^{(-1)}$ 为 P 的次逆阵,即 $P^{(-1)}P = J$.

2 主要结果及证明

定理 1 设 A 为 n 阶矩阵, $\mathrm{str}\,A = 0$ 的充要条件是 A 次相似于一个次对角元素均为零的 n 阶矩阵.

证明 充分性显然,下证必要性

因为 $\mathrm{str}\,A = \mathrm{tr}JA$, $\mathrm{str}\,A = 0$ 所以 $\mathrm{tr}JA = 0$,令 $B = JA$,由引理 1 知,存在可逆阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}BQ = C$,其中 C 为对角元素均为零的矩阵,即 $Q^{\mathrm{T}}JAQ = C$, $Q^{\mathrm{ST}}AQ = JQ^{\mathrm{T}}JAQ = JC$,显然 JC 的次对角元素均为零的 n 阶矩阵,定理得证.

定理 2 设 A 为 n 阶矩阵,若 $\mathrm{str}\,(A * A) = 0$,则有 $\mathrm{str}\,A = 0$.

证明 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$,则 $\mathrm{str}\,(A * A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}{}^2$,又 $\mathrm{str}\,(A * A) = 0$,那么有 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}{}^2 = 0$,即 $a_{i,n-i+1} = 0, i = 1, 2, \cdots, n$,因此 $\mathrm{str}\,A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1} = 0$.

定理 3 设 A 为 n 阶矩阵,且 A 为次对称次半正定阵,则 $\mathrm{str}\,A = 0$ 的充要条件是 $A = O$.

证明 A 为次对称矩阵,由引理 3 知,则存在正交矩阵 Q,使得 $A = Q^{\mathrm{ST}} \wedge Q$,其中 $\wedge = \mathrm{sdiag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 A 的次特征根,显然 $\lambda_i \geqslant 0$,再由性质 1 及 $\mathrm{str}\,A = 0$ 知 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$,又 $\lambda_i \geqslant 0$,故 $\lambda_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 于是 $\wedge = O$, $A = Q^{\mathrm{ST}}OQ = O$,反之,如果 $A = O$,则 $\mathrm{str}\,A = 0$.

定理 4 设 $A \in C^{n \times n}$, A 为零矩阵的充要条件是 $\mathrm{str}\,(A^{(*)}JA) = 0$.

证明 充分性显然,下证必要性.

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$,由性质 2 知, $\mathrm{str}\,(A^{(*)}JA) = \| A \|_F^2$,又 $\mathrm{str}\,(A^{(*)}JA) = 0$,则 $\| A \|_F^2 = 0$.

再由定义 3 知 $|A|_F^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 0$, $a_{ij} = 0, 1 \leqslant i, j \leqslant n$,故 $A = O$.

定理 5 设 A, B 为 n 阶矩阵, $\mathrm{str}\,(A \otimes B) = 0$ 的充要条件是 $\mathrm{str}\,A = 0$ 或 $\mathrm{str}\,B = 0$.

证明 充分性,因为

$$\mathrm{str}\,(A \otimes B) = a_{1n}\mathrm{str}\,B + a_{2,n-1}\mathrm{str}\,B + \cdots + a_{n,1}\mathrm{str}\,B = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}\mathrm{str}\,B = \mathrm{str}\,A\ \mathrm{str}\,B$$

当 $\mathrm{str}\,(A \otimes B) = 0$,则有 $\mathrm{str}\,A\ \mathrm{str}\,B = 0$,即 $\mathrm{str}\,A = 0$ 或 $\mathrm{str}\,B = 0$.

充分性的证明可逆,即必要性得证.

定理 6 设 A 为 n 阶双对称阵, $\mathrm{str}\,A=0$,则 $\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\right|=1$,其中 $n=2k,k\in N$.

证明 设 A 的次特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,由引理 2 知, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 JA 的特征值,令

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=\mathrm{e}^{\lambda}$$

则 $f(JA)$ 的特阵值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$,由矩阵行列式与特征根关系知

$$|f(JA)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(JA)^n}{n!}\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\right|=\prod_{i=1}^{n}f(\lambda_i)=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\lambda_i}=\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}=\mathrm{e}^0=1$$

定理 7 任意一个 n 阶矩阵 A 都可以分解成一个次迹为 0 的矩阵和一个次对称矩阵之和.

证明 对任意一个 n 阶矩阵 A,都可以分解成 $A=\frac{A+A^{\mathrm{ST}}}{2}+\frac{A-A^{\mathrm{ST}}}{2}$, $\frac{A+A^{\mathrm{ST}}}{2}$ 为次对称矩阵, $\frac{A-A^{\mathrm{ST}}}{2}$ 为反次对称矩阵且 $\mathrm{str}\left(\frac{A-A^{\mathrm{ST}}}{2}\right)=0$,命题得证.

由引理 3 知, $\frac{A+A^{\mathrm{ST}}}{2}$ 可次对角化,定理 7 可叙述为:

推论 1 任意一个 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 都可以分解成一个次迹为 0 的矩阵和一个可次对角化的矩阵之和.

参考文献:

[1] 邵逸民. 迹为零的矩阵的一些性质[J]. 沈阳师范大学学报:自然科学版,2008,26(4):409-411
[2] 刘玉,郑兹滨. 矩阵的次迹及其性质[J]. 高师理科学刊,2008,28(1):27-29
[3] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 2 版. 北京:科学出版社,2007
[4] 袁晖坪. 次亚正定矩阵的行列式不等式[J]. 工科数学,2001,17(5):54-58
[5] 龙永安. 双对称矩阵及其性质[J]. 广东职业技术师范学院学报,2001(4):34-36
[6] 于江明,谢清明. 次 Hermite 矩阵的次相合与次对角化[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2003,28(1):26-29
[7] 刘小明,郭华. 次特征值的界[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2006,23(4):343-367
[8] 袁晖坪,张勇,黄永忠. 次正交矩阵与次合同矩阵[J]. 渝州大学学报:自然科学版,1998,15(1):5-9

Matrix with Zero Subtrace and Its Properties

LIU Shao-qiang

(Department of Mathematics and Information Technology, Zhangzhou Normal University,
Fujian Zhangzhou 363000, China)

Abstract: In this paper, the concept of a matrix with zero subtrace is given, the properties of the matrix with zero subtrace are described in terms of the sub-similarity of the matrix, positive sub-semidefinite matrix, Kronecker pruduct, Hadamard pruduct, function of matrix, etc and several necessary conditions for this class of matrices are put forward . Some applications in the matrix factorization of these matrices are discussed.

Key words: subtrace of a matrix; matrix with zero subtrace; zero matrix

责任编辑:李翠薇