**文章编号**:1672 - 058X(2013)03 - 0013 - 04

# 一族强单调映射的公共零点的强收敛定理*

唐 艳
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

**摘 要**:在具有一致 Gateaux 可微范数的 Banach 空间中,假设任意非空有界闭凸子集都有非扩张映射的不动点的性质,讨论并在一定条件下证明了一族强单调映射的公共零点的迭代程序的强收敛定理.

**关键词**:单调映射;不动点;零点;强收敛

**中图分类号**:O177.91 **文献标志码**:A

设 $E$ 为一实 Banach 空间,$E^*$ 为 $E$ 的对偶空间,$<\cdot,\cdot>$ 表示广义对偶对,称 $J:E\to 2^{E^*}$ 为正规对偶映像,如果:$Jx=\{f^*\in E^*:<x,f^*>=\|x\|^2=\|f^*\|^2\}$,$\forall x\in E$. 若 $E$ 是光滑的,则 $J$ 是单值的. 今后均用 $j$ 表示单值赋范对偶映射.

设 $E$ 为一实 Banach 空间,$C$ 为 $E$ 的一个非空闭凸子集. 称映射 $A:C\to C$ 具有 L' ipschitz 性质,若存在常数 $L\geqslant 0$,使得

$$\|Ax-Ay\|\leqslant L\|x-y\|,\forall x,y\in D(A)$$

其中 $D(A)$ 为 $A$ 的定义域,$R(A)$ 为 $A$ 的值域. 当 $L<1$ 时,称 $A$ 为压缩的;当 $L=1$ 时,则称 $A$ 为非扩张的.

称 $A:C\to C$ 是强单调的,若存在 $k>0$ 使得

$$<x-y,Ax-Ay>\geqslant k\|x-y\|^2,\forall x,y\in D(A) \tag{1}$$

式子(1)也可等价表示为

$$<x-y,x-y-(Ax-Ay)>\leqslant(1-k)\|x-y\|^2$$

若 $A$ 是单调的,则方程 $Ax=0$ 的解与某些进展系统的平衡点相对应.

若 $A$ 是单调的,记 $A=I-T$,则

$$<x-y,(I-T)x-(I-T)y>\geqslant k\|x-y\|^2 \tag{2}$$

式子(2)也等价于

$$\|Tx-Ty\|^2\leqslant\|x-y\|^2+\|(I-T)x-(I-T)y\|^2 \tag{3}$$

令 $N(A)=\{x\in D(A):Ax=0\}$,$F(T)=\{x\in D(T):Tx=x\}$ 分别表示 $A$ 的零空间和 $T$ 的不动点集. 显然,$A$ 的零点是 $T=I-A$ 的不动点.

2004 年,Chidume[1] 在 Banach 空间中讨论了迭代过程:

$$x_{n+1}=Sx_n \tag{4}$$

的收敛性,其中 $S=a_0I+a_1T_1+a_2T_2+\cdots+a_rT_r$,$a_i\geqslant 0$,$\sum_{i=1}^{r}a_i=1$,$\{T_1,T_2,\cdots,T_r\}$ 是一族非扩张映射.

2007 年,Yao[2] 在 Banach 空间中证明了序列

**收稿日期**:2012 - 09 - 15;**修回日期**:2012 - 11 - 29.

* **基金项目**:重庆工商大学教育教学改革研究项目(11420);重庆市自然科学基金资助项目(CSTC,2012jjA00039).

**作者简介**:唐艳(1979-),女,四川泸州人,讲师,从事应用数学研究.

$$x_{n+1} = \lambda_{n+1} f(x_n) + \beta x_n + (1 - \beta - \lambda_{n+1}) W_n x_n$$

的强收敛性,其中 $W_n$ 是一族非扩张映射.

2009 年,Habtu[3] 等在 Banach 空间中固定 $u$,讨论了逆-强粘性映射的零点迭代格式:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n A x_n - \lambda_n \theta_n (x_n - u) \tag{5}$$

并在适当条件下证明了由式(5)得到的序列的强收敛性,其中 $A = \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_i$,$\{A_1, A_2, \cdots\}$ 为一族逆-强粘性映射.

2012 年,Tang[4] 等讨论了一个非扩张映射不动点的粘性迭代格式

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n T x_n$$

的强收敛性.

在此基础上,将构造一个迭代序列强收敛于一族强单调映射的公共零点,相应地,在 Banach 空间中讨论该强单调映射的公共零点的迭代程序的强收敛性.

## 1 预备知识

若 $S = \{x \in E: \|x\| = 1\}$ 为 $E$ 的单位球面,对任意的 $x, y \in S$,$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$ 一致存在,则称 $E$ 的范数是一致 Gateaux 可微的.

设 $E$ 为一实 Banach 空间,$K \subset E$ 为闭凸的,若 $Q(Q(x) + t(x - Q(x))) = Q(x)$,则称映射 $Q: E \to K$ 为单面的. 若 $Q^2 = Q$,则称 $Q$ 为缩进的.

此处将在(0,1)中考虑序列$\{\lambda_n\}\{\theta_n\}$满足以下条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \theta_n = \infty, \lim_{n \to \infty} \theta_n = 0, \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{\theta_n} = 0, \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{\theta_{n-1}}{\theta_n} - 1\right)}{\lambda_n \theta_n} = 0$$

**引理 1**[2] 设 $E$ 是具有一致 Gateux 可微范数的严格凸的自反 Banach 空间,$K$ 是 $E$ 的有界闭凸子集,令 $T: K \to K$ 为连续的伪压缩映射,$F(T) \neq \varnothing$. 对 $u \in K$,映射 $y_t \in K, t \in (0,1]$ 满足 $y_t = (1 - t) T y_t + t u$,则 $y_t$ 在 $t \to 0^+$ 时强收敛于 $T$ 的不动点 $Qu$,其中 $Q: K \to F(T)$ 是唯一的单面非扩张缩进.

**引理 2**[3] 设 $E$ 为一实 Banach 空间,$E^*$ 为 $E$ 的对偶空间,$J: E \to 2^{E^*}$ 为正规对偶映像,则对任意的 $x, y \in E$,有 $\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2 < y, j(x + y) >, \forall j(x + y) \in J(x + y)$.

**引理 3**[5] 设$\{\lambda_n\}\{\alpha_n\}\{\gamma_n\}$均为非负实数列,且满足条件:$\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$,$\gamma_n = o(\alpha_n)$,$\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是严格单增函数且 $\psi(0) = 0$,若序列

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \alpha_n \psi(\lambda_{n+1}) + \gamma_n, n = 1, 2, 3, \cdots$$

则 $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.

## 2 主要结果

**定理 1** 设 $K$ 是光滑的 Banach 空间 $E$ 的非空闭凸子集. $A_i: K \to E, i = 1, 2, \cdots$ 为一族强单调映射,使得 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} N(A_i) \neq \varnothing$,则存在一个强单调映射 $A: K \to E$,使得 $N(A) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} N(A_i)$.

**证明** 设$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$为任意正实数列,满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = 1$,令 $A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i A_i$,则 $\forall x, y \in K$,根据 $A_i$ 的强单调

性，有

$$< Ax - Ay, x - y > = < \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_i x - \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_i y, x - y > =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i < A_i x - A_i y, x - y > \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_i k \| x - y \|^2 = k \| x - y \|^2$$

可见 $A$ 是强单调的. 下面说明 $N(A) = \bigcap_{i=1}^{\infty} N(A_i)$.

设 $\forall x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} N(A_i)$，则 $A_i x = 0, i = 1, 2, \cdots$，显然 $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_i x = a_1 A_1 x + a_2 A_2 x + \cdots = 0$，所以 $x \in N(A)$. 若 $\forall x \in N(A), p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} N(A_i)$，不妨假设 $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} N(A_i)$，则必存在 $r > 0$，使得 $A_r x \neq 0$，再由 $A_i$ 的强单调性，可知

$$< Ax, x - p > = < Ax - Ap, x - p > = < \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_i x - \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_i p, x - p > \neq 0$$

这与 $< Ax, x - p > = 0$ 矛盾，因此 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} N(A_i)$，所以 $N(A) = \bigcap_{i=1}^{\infty} N(A_i)$.

**定理 2**　设 $E$ 为一致 Gateaux 可微的严格凸的实自反 Banach 空间，令 $A_i : E \to E, i = 1, 2, \cdots$ 为一族强单调映射，使得 $\bigcap_{i=1}^{\infty} N(A_i) \neq \varnothing$，$f: E \to E$ 是具有压缩系数 $0 < \rho < 1$ 的压缩映射. 假设 $\alpha = \inf_{i \geqslant 1} \{\alpha_i\}$，令 $\{x_n\}$ 由式 (6) 生成：

$$\begin{cases} x_1 \in E \\ x_{n+1} = x_n - \lambda_n A x_n - \lambda_n \theta_n (x_n - f(x_n)) \end{cases} \tag{6}$$

其中 $A = \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_i, 0 < a_i < 1, \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1, \theta_n \to 0, \dfrac{\lambda_n}{\theta_n} \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \theta_n = \infty$，则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\{A_1, A_2, \cdots\}$ 的公共零点 $Q\xi$，其中 $Q: E \to \bigcap_{i=1}^{\infty} N(A_i)$ 是唯一的单面非扩张收缩.

**证明**　首先说明 $\{x_n\}$ 的有界性. 令 $\forall p \in N(A)$，则 $Ap = 0$，且由 $A$ 的强单调性可知，

$$\begin{aligned} < Ax_{n+1}, x_{n+1} - p > &= < Ax_{n+1}, x_n - \lambda_n A x_n - \lambda_n \theta_n (x_n - f(x_n) - p) > = \\ & < Ax_{n+1}, x_n - \lambda_n A x_n - \lambda_n \theta_n (x_n - f(x_n) - \lambda_n \theta_n p - (1 - \lambda_n \theta_n) p) > = \\ & < Ax_{n+1}, \lambda_n \theta_n (f(x_n) - p) + x_n - p - \lambda_n A x_n + \lambda_n \theta_n (p - x_n) + \lambda_n A p > = \\ & < Ax_{n+1}, \lambda_n \theta_n (f(x_n) - f(p)) + \lambda_n \theta_n (f(p) - p) + \\ & (1 - \lambda_n \theta_n)(x_n - p) - \lambda_n (A x_n - Ap) > \leqslant \\ & \{[1 - (1 - \rho)\lambda_n \theta_n] \| x_n - p \| + \lambda_n \theta_n \| f(p) - p \| \} \| Ax_{n+1} - Ap \| \end{aligned}$$

所以 $\| x_{n+1} - p \| \leqslant [1 - (1 - \rho)\lambda_n \theta_n] \| x_n - p \| + \lambda_n \theta_n \| f(p) - p \|$，因此 $\{x_n\}$ 有界.

令 $T = I - A, t_n = \dfrac{\theta_n}{1 + \theta_n}$，记 $y_n = (1 - t_n)(I - A) y_n + t_n f(x_n)$，则由引理 1 可知 $\{y_n\}$ 在 $\theta_n \to 0$ 时强收敛于 $y = Q\xi \in N(A)$，其中 $\xi$ 为 $f$ 的不动点. 下面说明 $\| x_n - y_n \| \to 0$.

由于 $\{y_n\}$ 可以表示为

$$y_n = \frac{1}{1 + \theta_n}(I - A) y_n + \frac{\theta_n}{1 + \theta_n} f(x_n) \tag{7}$$

由引理 2 可知

$$\begin{aligned} & \| x_{n+1} - y_n \|^2 = \| x_n - \lambda_n A x_n - \lambda_n \theta_n (x_n - f(x_n)) - y_n \|^2 \leqslant \\ & \| x_n - y_n \|^2 + 2 < - \lambda_n A x_n - \lambda_n \theta_n (x_n - f(x_n)), j(x_{n+1} - y_n) > = \\ & \| x_n - y_n \|^2 - 2\lambda_n \theta_n < x_{n+1} - y_n, j(x_{n+1} - y_n) > + \end{aligned}$$

$$2\lambda_n < \theta_n(x_{n+1} - y_n) - Ax_n - \theta_n(x_n - f(x_n)), j(x_{n+1} - y_n) > =$$
$$\| x_n - y_n \|^2 - 2\lambda_n\theta_n \| x_{n+1} - y_n \|^2 + 2\lambda_n < \theta_n(x_{n+1} - x_n) + (Ax_{n+1} - Ax_n) - (Ax_{n+1} - Ay_n) +$$
$$\theta_n(f(x_n) - y_n) - Ay_n, j(x_{n+1} - y_n) > \tag{8}$$

因为 $\theta_n(f(x_n) - y_n) - Ay_n = 0$,且由 $A$ 的强单调性可知 $< Ax_{n+1} - Ay_n, j(x_{n+1} - y_n) > \geqslant 0$,所以式(8)可以表示为

$$\| x_{n+1} - y_n \|^2 \leqslant \| x_n - y_n \|^2 - 2\lambda_n\theta_n \| x_{n+1} - y_n \|^2 + 2\lambda_n <$$
$$\theta_n(x_{n+1} - x_n) + (Ax_{n+1} - Ax_n), j(x_{n+1} - y_n) > \leqslant$$
$$\| x_n - y_n \|^2 - 2\lambda_n\theta_n \| x_{n+1} - y_n \|^2 + 2\lambda_n[\theta_n \| x_{n+1} - x_n \| +$$
$$\| Ax_{n+1} - Ax_n \| ] \| x_{n+1} - y_n \| \leqslant$$
$$\| x_n - y_n \|^2 - 2\lambda_n\theta_n \| x_{n+1} - y_n \|^2 + 2\lambda_n(\theta_n + 2) \| x_{n+1} - x_n \| \cdot \| x_{n+1} - y_n \| =$$
$$\| x_n - y_n \|^2 - 2\lambda_n\theta_n \| x_{n+1} - y_n \|^2 + 2\lambda_n^2(\theta_n + 2) \| Ax_n +$$
$$\theta_n(x_n - f(x_n)) \| \cdot \| x_{n+1} - y_n \| \tag{9}$$

由于 $N(A) \neq \varnothing$,由文献[3]的性质2可知 $\{y_n\}$ 有界,因此存在 $M > 0$,使得 $\max\{(\theta_n + 2) \| Ax_n + \theta_n(x_n - f(x_n)) \|, \| x_{n+1} - y_n \| \} < M$,则式(9)可以表示为

$$\| x_{n+1} - y_n \|^2 \leqslant \| x_n - y_n \|^2 - 2\lambda_n\theta_n \| x_{n+1} - y_n \|^2 + 2\lambda_n^2 M^2 \tag{10}$$

另外再由算子 $A$ 的强单调性以及对偶映射的性质可知

$$\| y_{n-1} - y_n \| \leqslant \| y_{n-1} - y_n + \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}(Ay_{n-1} - Ay_n) \| \leqslant$$
$$\frac{|\theta_{n-1} - \theta_n|}{\theta_n}( \| y_{n-1} \| + \| f(x_{n-1}) \| ) \tag{11}$$

由式(10)和式(11),以及 $\{y_n\}\{f(x_n)\}$ 的有界性可知

$$\| x_{n+1} - y_n \|^2 \leqslant \| x_n - y_{n-1} \|^2 - 2\lambda_n\theta_n \| x_{n+1} - y_n \|^2 + \frac{|\theta_{n-1} - \theta_n|}{\theta_n}M_1 + 2\lambda_n^2 M^2$$

其中 $M_1 > 0$ 为一常数. 则由引理3和 $\{\lambda_n\}\{\theta_n\}$ 的条件可知,$x_{n+1} - y_n \to 0$. 所以 $n \to \infty$ 时,$\| x_n - y_n \| \to 0$,由引理1可知 $y_n \to y = Q\xi \in N(A)$,从而 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\{A_1, A_2, \cdots\}$ 的公共零点 $Q\xi$.

**参考文献:**


[1] REICH. Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces[J]. Math Anal App,1980(75):287-292

[2] CHIDUME C E,ZEGEYE H,ANEKE S J. Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. Comm Appl NonliearAnal,2004,11(2):25-32

[3] YAO Y,YAO J C,ZHOU H. Approximation methods for common fixed point of infinite countable family of nonexpansive mappings [J]. Comput Math Appl,2007(53):1380-1389

[4] ZEGEYE H,SHAHZQAD N. Strong convergence theorems for a common zero of a countably infinite family of α-inverse strongly accretive mappings[J]. Nonliear Anal,2009(71):531-538

[5] 唐艳. Banach 空间中非扩张映射不动点的粘性逼近[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(1):1-3

[6] 闻道君. 混合拟变分不等式的预测-校正算法[J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2009,34(5):41-44


**(下转第 21 页)**