文章编号:1672 -058X(2013)02 -0018 -03

定积分定义在证明和求极限中的应用*

曾 静, 程珍珍, 耿立刚
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:定积分的值只与被积函数和积分区间有关,与区间的划分方法以及点 ξ_i 的选取方法无关,利用定积分的定义,选择合理的区间划分方法及点 ξ_i 的选取法,不但可以简化与定积分相关的证明,而且可以处理一些复杂的求极限问题.

关键词:定积分;等分区间;极限
中图分类号:O172 **文献标志码**:A

0 引 言

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一个连续函数, I 是一定数. 若任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\sigma>0$,对任意的分法 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,不论点 ξ_i 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中如何选取,只要 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}<\delta$,就有 $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$,则称 I 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分[1],记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

值得注意的是定积分的值只与被积函数和积分区间有关,与区间的划分方法以及点 ξ_i 的选取方法无关[2]. 正因为这个特性,在划分区间以及选取点 ξ_i 时,选取一些特殊而恰当的方式,可以帮助求解一些关于定积分的证明以及一些复杂的求极限问题[3].

1 定积分定义在证明中的应用

在定积分定义的区间划分方式中,选择等分区间,选取点 ξ_i 时,选择小区间的一个端点,可以帮助求解一些关于定积分的证明题.

例 1 求证若 $f(x)\in R[0,1]$, $f(x)\geqslant a>0$,则 $\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x\leqslant\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

证明 取 P_n 为区间 $[0,1]$ 的一个划分, $P_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\}$,它将 $[0,1]$ 划分成 n 个等份小区间,

收稿日期:2012 -10 -08;修回日期:2012 -11 -01.
* 基金项目:国家自然科学基金(11101453).
作者简介:曾静(1983-),女,四川彭州人,讲师,博士研究生,从事最优化理论研究.

故每个小区间的长度都是$\frac{1}{n}$,区间长度最大值为 $\lambda=\frac{1}{n}$,要使 $\lambda\to 0$,则 $n\to\infty$. 在区间$[x_{i-1},x_i]$中选取点 $\xi_i=x_i$,则有

$$\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i) = \lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)}$$

$$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right)$$

又因为$f(x)>0$,所以 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)}$. 由于 $\ln x$ 是严格单调递增的,所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right)\geqslant\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)}$$

即 $\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2　定积分定义在求极限中的应用

定积分是通过极限定义的,反过来一些求极限的问题也常常通过定积分来求解. 求解过程中,也常常利用定积分定义中区间划分及点 ξ_i 选取的任意性这一特性.

例 2　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}\right)$

解　对$\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}$提出一个公因式$\frac{1}{n}$,则可变为

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{n^2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4n^2}{n^2}}}\right)\tag{1}$$

对式(1)右边式子进行变形,让第一项分母的根式里面出现$\frac{1}{n}$,让第二项分母的根式里面出现$\frac{2}{n}$,以此类推,式(1)可变形为

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\times(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+4\times\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+4\times\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)\tag{2}$$

从而所求极限为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\times\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+4\times\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+4\times\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

3 小 结

在定积分的学习过程中,充分理解和掌握定积分定义中区间的划分方法、以及点 ξ_i 的选取方法与定积分值无关这一特性,将有助于证明一些关于定积分的复杂证明题. 同时,逆向思考极限与定积分定义之间关系,有利于求解一些复杂的求极限问题. 总之,在学习新概念的时候,必须深刻理解新概念的精髓和本质,这样才能做到活学活用.

参考文献:

[1] 欧阳光中,朱学炎,金福临,陈传璋. 数学分析[M].3 版.北京:高等教育出版社,2007

[2] 邓乐斌. 数学分析的理论、方法与技巧[M].武汉:华中科技大学出版社,2005

[3] 李焕荣,宋证远. 关于复合型数值求积公式的几点注记[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(3):51-54

Application of Definite Integral Definition to the Proof and Solution to Limit

ZENG Jing, CHENG Zhen-zhen, GENG Li-gang

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The value of definite integral is only related to integral function and integral interval but is not related to the method of interval division and the method for choosing point ξ_i. The definition of definite integral can be used to choose reasonable interval division method and point ξ_i selection method, which can not only simplify the proofs related to definite integral but also be able to deal with some complex problems in the solution to limit.

Key words: definite integral; equal subinterval; limit

责任编辑:李翠薇