文章编号:1672 - 058X(2013)02 - 0004 - 03

序列函数在强一致收敛下极限函数轨道的稠密性*

邓晓霞, 金渝光

(重庆师范大学 数学学院,重庆 630047)

摘　要:文献[1]证明了序列系统在强一致收敛下极限系统的许多动力性质(如:拓扑传递、拓扑混合等)可以被遗传,但是在一致收敛下不能被遗传。在此基础上对序列函数的极小性、传递性来讨论其极限函数轨道的稠密性问题进行了研究.

关键词:强一致收敛;单边传递性;拓扑传递性;极小性

中图分类号:O182.1　　　　**文献标志码:**A

1　相关概念

一致收敛是数学分析和拓扑学中的重要概念,在一致收敛下,序列系统的许多动力性质不能遗传至极限系统。文献[2]给出了一个比一致收敛更强的定义——强一致收敛。文献[1]则讨论了在强一致收敛的条件下,序列函数的某些动力性质如极小性、传递性等可以遗传至极限函数。利用这些结果得到序列函数的极限函数的稠密性.

下面给出有关的概念和符号. 文中,设(X,f)为拓扑动力系统,其中 X 为具有 度量 d 的紧致度量空间,及 f 为 X 上的连续自映射. 对 $x\in X$, $Orb(x,f)=\{f^n(x):n\in Z\}$, $Orb^+(x,f)=\{f^n(x):n\in Z_+\}$, $Orb^-(x,f)=\{f^n(x):n\in Z_-\}$ 分别表示 x 在 f 下的轨道,正轨道,负轨道. 而 x 的 ω - 极限集 $\omega(x,f)$ 则表示 $Orb(x,f)$ 的全体极限点集,即 $y\in\omega(x,f)$ 当且仅当存在序列 $n_i\to\infty$,使得 $f^{n_i}(x)\to y$. 称(X,f)为极小的,是指它不真包含任何闭不变子集.

定义 1[1]　设(X,d)是紧致度量空间,对每一个整正数 n, $f_n:X\to X$ 是连续映射 . 如果对于任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 n_0 时,使得对于 $n>n_0$ 以及任意 $x\in X$ 有 $d(f_n(x),f(x))<0$ 则称序列 $\{f_n\}$ 一致收敛于函数 $f:X\to X$,记作 $f_n\Rightarrow f$.

定义 2[2]　设(X,d)是紧致度量空间,对每一个整正数 n, $f_n:X\to X$ 是连续映射,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $n_0\in N$,使得当 $n>n_0$ 时,对任意 $l\in N$,任意 $x\in X$,有 $d(f_n^l(x),f^l(x))<\varepsilon$,则称 f_n 强一致收敛于 f,记作 $f_n\xrightarrow{s}f$.

定义 3[3]　设 $U,V\subset X$. 记 $N(U,V)=\{n\in Z^+:U\cap f^{-n}V\neq\varphi\}$. 称 f 为拓扑传递的,是指对 X 的任意两个非空开集 U,V, $N(U,V)\neq\varphi$.

定义 4[4]　称动力系统 $f:X\to X$ 是极小的,如果对任意 $x\in X$,当 $f:X\to X$ 同胚时有 $Orb(x,f)$ 在 X 中稠密;

收稿日期:2012 - 10 - 10;**修回日期:**2012 - 11 - 20.

* **基金项目:**国家自然科学基金资助项目(10971240).

作者简介:邓晓霞(1987-),女,四川自贡人,硕士研究生,从事拓扑动力系统研究.

当 $f:X\to X$ 连续时有 $Orb^+(x,f)$ 在 X 中稠密.

定义 5[4] 称连续映射 $f:X\to X$ 为单边拓扑传递的,若存在 $x\in X$ 使 $Orb^+(x,f)$ 在 X 内稠密;若 $f:X\to X$ 同胚且存在 $x\in X$ 使 $Orb(x,f)$ 在 X 内稠密,则 f 拓扑传递的.

2 若干命题

命题 1[2] 设 $\{(X,f_n)\}$ 为拓扑动力系统序列,且 $\{f_n\}\xrightarrow{s}f$,则有:

$$\omega(x,f) = \lim \omega(x,f_n), \forall x \in X.$$

命题 2[2] 设 $\{(X,f_n)\}$ 为拓扑动力系统序列,且 $f_n\xrightarrow{s}f$. 若 f_n 是极小,则 f 是极小.

命题 3[3] 设 $\{(X,f_n)\}$ 为拓扑动力系统序列,且 $f_n\xrightarrow{s}f$,则有:

$$\lim orb(x,f_n) = \overline{orb(x,f)}, \forall x \in X.$$

命题 4 设 $\{(X,f_n)\}$ 为拓扑动力系统序列,且 $f_n\xrightarrow{s}f$. 若 f_n 是极小的,则 $\forall x\in X,f:X\to X$ 是同胚映射时其轨道在 X 中稠密,即 $\overline{Orb(x,f)}=X$.

证明 因 $\{(X,f_n)\}$ 是拓扑动力系统序列且 $f_n\xrightarrow{s}f$. 若 $\{f_n\}$ 是极小的,由命题 3 可知 f 也是极小的,又由定义 4 可知 f 是极小的,则有对每一个 $x\in X,f:X\to X$ 同胚有 $Orb(x,f)$ 在 X 中稠密. 所以 $\forall x\in X,f$ 在 X 上自同胚其轨道在 X 中稠密,即 $\overline{Orb(x,f)}=X$.

命题 5 设 $\{(X,f_n)\}$ 为拓扑动力系统序列,且 $f_n\xrightarrow{s}f$. 若 $\{f_n\}$ 是极小的,则 f 是拓扑传递的.

证明 设 $x\in X$ 由 f_n 是极小的,X 是 f_n 的唯一非空闭不变子集,那么 $\omega(x,f_n)$ 由命题 1 得 $\omega(x,f)=X$. 有 $\omega(x,f)\subset\overline{Orb(x,f)}$ 可得 $\overline{Orb(x,f)}=X$ 则存在 $x_0\in X$,使 $orb(x_0,f)$ 包含 X 中的稠密子集 $orb(x_0,f)$,从而 f 是拓扑传递的.

3 定理及证明

定理 1 设 $\{(X,f_n)\}$ 是拓扑动力系统序列,$\forall n\in Z,f_n:X\to X$ 是连续映射且 $f_n\xrightarrow{s}f$. 若 f_n 单边拓扑传递,则 f 是单边拓扑传递.

证明 因 f_n 连续且单边拓扑传递,则,存在 $x\in X$ 使 $Orb^+(x,f)$ 在 X 内稠密;又由 $f_n\xrightarrow{s}f$ 由命题 3 知 $\lim orb(x,f_n)=\overline{orb(x,f)}$, $\forall x\in X$. 又因 f 在 X 中是连续映射则 $orb^+(x,f)=\omega(x,f)=X$,再由定义 4 可知 $orb^+(x,f)$ 在 X 中稠密,即 f 在 X 中自连续是拓扑传递的.

注意:拓扑传递的,但不是单边拓扑传递的.

例如:在集合 $\left\{0,1,\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}|k\geqslant 2\right\}$ 上取 R 导出的拓扑,定义 $f:X\to X$ 为:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ 1, x = 1, \\ \dfrac{1}{k+1}, x = \dfrac{1}{k}, k \geqslant 2, \\ 1 - \dfrac{1}{k-1}, x = 1 - \dfrac{1}{k}, k > 2. \end{cases}$$

取 $x\in X\backslash\{0,1\}$ 易知 $Orb(x,f)$ 在 X 中稠密,故是拓扑传递的. 但是,f 不是单边拓扑传递的.

定理 2　设$\{(X,f_n)\}$是拓扑动力系统序列,X 是紧度量空间,对$\forall n\in Z, f_n:X\to X, f_n\xrightarrow{s}f$且$f_n$是拓扑传递的,若$f(x):X\to X$同胚且 X 中的开集 U 是 f 的不变集,则 $U=\varphi$,或者 U 在 X 中稠密.

证明　因f_n是拓扑传递的,又因$f_n\xrightarrow{s}f$,由文献[1]可知f是传递的. f是拓扑传递的,则存在$x\in X$使$Orb(x,f)$在 X 中稠密. 于是,对 X 中的非空开集 U,存在$n_1\in Z$使$f^{n_1}(x)\in U$. 已知 U 是 f 的不变集,则有$f(U)=U$或$U=f^{-1}(U)$,可得 X 中的稠子集$Orb(x,f)=\{f^n(x)\mid n\in Z\}\subset U$,故 U 在 X 中稠密.

定理 3　设$\{(X,f_n)\}$是拓扑动力系统序列,X 是紧度量空间,$\forall n\in Z, f_n:X\to X$是连续自映射,$f_n\xrightarrow{s}f$. 若$f_n$是单边拓扑传递,则对 X 中的任一非空开集 U 且$f^{-1}(U)\subset U$,则 $U=\varphi$ 或者 U 在 X 中稠密.

证明　要证结论成立,也就证等价命题:对 X 中的任意闭集 A,若$A\subset f^{-1}(A)$且$A=X$或者 A 是无处稠密集. 下证 A 不是无处稠密集,即存在 X 中的非空开集 U 使得 $U\subset A$. 由已知f_n单边拓扑传递,由定理 1 可知f也单边拓扑传递,则存在$x\in X$,及$k\geqslant 0$,使$f^k(x)\in U\subset A$,从而$f^{k+1}(x)\in f(U)\subset f(A)\subset A$,由此可得$\overline{\{f^n(x)\mid n\geqslant k\}}\subset A$记作式(1),从而取其闭包有$\overline{\{f^n(x)\mid n\geqslant k\}}\subset A$. 注意$\overline{Orb^+(x,f)}=X$,则有$\overline{\{f^n(x)\mid n\geqslant k\}}=X-\{x,f(x),\cdots,f^{k-1}(x)\}$,带入可得$A\cup\{x,f(x),\cdots,f^{k-1}(x)\}=X$. 用$f$作用该式 k 次,f满足式(1)的,得 $A=X$,故定理结论成立.

参考文献:

[1] 曾凡平,严可颂,刘新和. 强一直收敛与动力性质[J]. 广西大学学报:自然科学版,2008,33(3):305-309

[2] RAGHIB A S,KIFAH A H. Uniform convergence and chaotic behavior[J]. Nonlin-ear Analysis,2006,(65):933-937

[3] 秦斌,严可颂,徐雪群. 一致收敛下极限系统的传递性研究[J]. 广西师范学院学报:自然科学版,2009,26(3):10-14

[4] 陈绥阳,褚蕾蕾. 动力系统基础及其方法[M]. 北京:科学出版社,2002

Denseness of Limit Function Orbit of Sequence Function under Strong Uniform Convergence

DENG Xiao-xia, JIN Yu-guang

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The reference [1] proved that many dynamic properties of limit system of sequence system such as topological transmission, topological mixing and so on under strong uniform convergence could be inherited but could not be inherited under uniform convergence, based on this, the research on the denseness issue of limit function orbit discussed by minimum value and inheritance of sequence function is conducted.

Key words: strong uniform convergence; unilateral transitivity; topological transitivity; minimality

责任编辑:田　静