文章编号:1672-058X(2013)01-0018-03

全转置正交矩阵

郭 华
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:给出了全转置矩阵和全转置正交矩阵的定义,并研究了全转置正交矩阵,给出了它的一系列性质.

关键词:全转置矩阵;全转置正交矩阵;次转置矩阵;特征值
中图分类号:O151 **文献标志码**:A

1 全转置矩阵及其性质

定义 1 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,将 A 顺时针(或逆时针)旋转 180 度,得到的矩阵记为 A^O,并记

$$A^O=\begin{pmatrix} a_{mn} & a_{m,n-1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{m-1,n} & a_{m-1,n-1} & \cdots & a_{m-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix} \tag{1}$$

全转置矩阵有如下一些性质:

引理 1[1,2] 设 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$,则下述结论成立:

(1) $(A^O)^O=A$.

(2) A,B 是同型矩阵时 $(A+B)^O=A^O+B^O$.

(3) λ 为常数时,$(\lambda A)^O=\lambda A^O$.

(4) A 与 B 可相乘时,$(AB)^O=A^O B^O$.

(5) $(A^O)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^O$.

(6) 用 A^{ST} 表示 A 的次转置矩阵,则 $A^{\mathrm{ST}}=(A^{\mathrm{T}})^O=(A^O)^{\mathrm{T}}$.

引理 2[3] 设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$,则有:

(1) $|A^O|=|A|$.

(2) A 是可逆矩阵时,A^O 也可逆,且 $(A^O)^{-1}=(A^{-1})^O$.

(3) 用 A^* 表示 A 的伴随矩阵,有 $(A^*)^O=(A^O)^*$.

收稿日期:2012-09-07;**修回日期**:2012-10-09.
作者简介:郭华(1962-),女,重庆人,副教授,从事矩阵理论研究.

(4) A,B 均是 n 阶可逆矩阵，则 $(AB)^O$ 也可逆，且 $((AB)^O)^{-1}=(B^{-1})^O(A^{-1})^O$.

(5) A 是可逆矩阵时，k 是不为零的常数，则 $(kA)^O$ 也可逆，且 $((kA)^O)^{-1}=\frac{1}{k}(A^{-1})^O$.

(6) A 是可逆矩阵时，$|(A^O)^{-1}|=|A^{-1}|$.

2　全转置正交矩阵和它的一些性质

定义 2　对 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，如 $AA^O=A^OA=I$，则称 A 为全转置正交矩阵.

性质 1　设 $A,B\in\mathbf{R}^{n\times n}$，且均为全转置正交矩阵，则

(1) A 可逆，且 $A^{-1}=A^O$.

(2) $|A|=\pm1$.

(3) $A^{\mathrm{T}},A^{-1},A^O,A^{\mathrm{ST}},A^*$ 也是全转置正交矩阵.

(4) 当 A，B 可交换时，AB 也是全转置正交矩阵，从而 A^k(k 为整数)也是全转置正交矩阵.

证明　(1) 显然成立.

(2) 由 $A^OA=I\Rightarrow|A^O||A|=|I|=1,\Rightarrow|A|^2=1,\Rightarrow|A|=\pm1$.

(3) 由 $A^OA=I\Rightarrow(A^OA)^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}},\Rightarrow A^{\mathrm{T}}(A^O)^{\mathrm{T}}=I\Rightarrow A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^O=I$，所以 A^{T} 是全转置正交矩阵.

由 $A^OA=I\Rightarrow(A^OA)^{-1}=I^{-1},\Rightarrow A^{-1}(A^O)^{-1}=I\Rightarrow A^{-1}(A^{-1})^O=I$，所以 A^{-1} 是全转置正交矩阵.

由 $A^OA=I\Rightarrow(A^OA)^O=I^O,\Rightarrow(A^O)^OA^O=I$，所以 A^O 是全转置正交矩阵.

由 $A^OA=I\Rightarrow(A^OA)^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}},\Rightarrow A^{\mathrm{T}}(A^O)^{\mathrm{T}}=I$，因为 $(A^O)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{ST}},A^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{ST}})^O$，所以 $(A^{\mathrm{ST}})^OA^{\mathrm{ST}}=I$，$A^{\mathrm{ST}}$ 是全转置正交矩阵.

因为 A 可逆，且 $A^*=|A|A^{-1}$，所以由 $A^*(A^*)^O=|A|A^{-1}(|A|A^{-1})^O=|A|^2A^{-1}(A^{-1})^O=A^{-1}(A^O)^{-1}=(A^OA)^{-1}=I$，可知 A^* 是全转置正交矩阵.

(4) 因为 $AB=BA$，所以 $(AB)^O(AB)=A^OB^OAB=A^OB^OBA=A^OA=I$. 可知 AB 是全转置正交矩阵.

性质 2　设 A,B 可逆，且存在全转置正交矩阵 Q，使得 $A=BQ$，且 B,Q 可交换，则有 $A^OA=B^OB$.

证明　因为 $A=BQ,Q^OQ=I,BQ=QB$，所以 $A^OA=(BQ)^O(BQ)=B^OQ^OQB=B^OB$.

性质 3　设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$A$ 为全转置正交矩阵，则 $2n$ 阶方阵 $D=\begin{pmatrix}O&A\\A&O\end{pmatrix}$ 是全转置正交矩阵.

证明　$D^OD=\begin{pmatrix}O&A\\A&O\end{pmatrix}^O\begin{pmatrix}O&A\\A&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&A^O\\A^O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&A\\A&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^OA&O\\O&A^OA\end{pmatrix}=I.$

性质 4　设 A,B 是 n 阶全转置正交矩阵，若 $|AB|=-1$，则 $|A+B|=0$.

证明　因为 $A^OA=I,B^OB=I$，所以 $|A+B|=|AB^OB+AA^OB|=|A(B^O+A^O)B|=|A||(B+A)^O||B|=|A||B+A||B|=|AB||A+B|=-|A+B|$，于是 $|A+B|=0$.

性质 5　设 A,B 是 n 阶全转置正交矩阵，若 $|A|+|B|=0$，则 $|A+B|=0$.

证明　由性质 4 的推导过程有 $|A+B|=|A||B+A||B|=-|A|^2|A+B|=-|A+B|$，于是 $|A+B|=0$.

性质 6　设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$A$ 为全转置正交矩阵，若 λ 是 A 的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^O 的特征值.

证明　因为 $A^{-1}=A^O$，而 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，即是 A^O 的特征值.

性质 7　设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$A$ 为全转置正交矩阵，若 $|A|=-1$，则 $\lambda=-1$ 一定是 A 的特征值；若 $|A|=1$，当 n 为奇数时，则有 $\lambda=1$ 一定是 A 的特征值.

证明　当 $|A|=-1$ 时，因为 $|A+I|=|A+AA^O|=|A||I+A^O|=|A||(I+A)^O|=|A||I+A|=-|A+I|$，

即有$|A+I|=0$,$\lambda=-1$ 为 A 的特征值.

若$|A|=1$,当 A 的阶数 n 为奇数时,$|A-I|=|A-AA^O|=|A||I-A^O|=|A||(I-A)^O|=|I-A|=(-1)^n|A-I|=-|A-I|$,即有$|A-I|=0$,$\lambda=1$ 为 A 的特征值.

性质 8 设 $B\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$B$ 为全转置正交矩阵,$I+B$ 是可逆矩阵,则存在矩阵 A,A 满足 $A=-A^O$,使 $B=(I-A)(I+A)^{-1}$.

证明 因为

$$(I-B)(I+B)=(I+B)(I-B) \tag{2}$$

用$(I+B)^{-1}$左乘和右乘式(2)两端可得$(I-B)(I+B)^{-1}=(I+B)^{-1}(I-B)$,令

$$A=(I-B)(I+B)^{-1}=(I+B)^{-1}(I-B) \tag{3}$$

则 $A+I=(I+B)^{-1}(I-B)+I=(I+B)^{-1}(I-B)+(I+B)^{-1}(I+B)=(I+B)^{-1}2I$,可知 $A+I$ 可逆.

用 $I+B$ 左乘式(1)得

$$(I+B)A=I-B,\Rightarrow(I+B)^OA^O=(I-B)^O\Rightarrow(I+B^O)A^O=I-B^O\Rightarrow A^O+B^OA^O=I-B^O \tag{4}$$

将式(4)两端左乘 B,得 $BA^O+A^O=B-I$,即$(B+I)A^O=(B-I)$,所以

$$A^O=(B+I)^{-1}(B-I)=-(B+I)^{-1}(I-B)=-A \tag{5}$$

再由

$$(I+B)A=I-B\Rightarrow A+BA=I-B\Rightarrow BA+B=I-A\Rightarrow B(A+I)=I-A \tag{6}$$

因为 $A+I$ 可逆,式(6)两端右乘$(A+I)^{-1}$,即得 $B=(I-A)(I+A)^{-1}$. 得证.

参考文献:

[1] 许永平. 旋转矩阵的一些概念与一些结论[J]. 江苏广播大学学报,1997(2):81-84

[2] 许永平,石小平. 正交矩阵的充要条件与 O-正交矩阵的性质[J]. 南京林业大学学报:自然科学版,2005(2):2-4

[3] 周素琴. 2-旋转矩阵及其性质[J]. 上海师范大学学报:自然科学版,2001(1):89-91

[4] 袁晖坪. 次正交矩阵与次对称矩阵[J]. 西南大学学报:自然科学版,1998(2):147-150

[5] 郭伟. 实次规范阵与次正交阵的进一步拓广[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2006(3):240-242

[6] 王力梅,郭莉琴,邵海琴,等. 分块矩阵的行列式[J]. 四川兵工学报,2011,32(11):149-150

Full-transposed Orthogonal Matrix

GUO Hua

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University,
Chongqing 400067, China)

Abstract: This article gives the definitions of full-transposed matrix and full-transpose orthogonal matrix and a series of properties of the latter.

Key words: full-transposed matrix; full-transposed orthogonal matrix; sub-transposed matrix; characteristic value

责任编辑:李翠薇