文章编号:1672 -058X(2013)01 -0016 -02

运用压缩映射原理证明满足一定条件的函数存在定理及推广*

费伦帅, 况　杰
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:压缩映射是度量空间与度量空间之间的一种特殊的对应关系,通过这种对应关系可以找到集合 X 中的稳定点即不动点;通过压缩映射定理知道满足一定条件的情况下可以得到唯一的不动点;在已有的定理证明上,通过一些条件的改变,然后得出新的命题,再用微分中值定理证明其正确性.

关键词:压缩映射;质量空间;不动点存在定理

中图分类号:O172　　　　**文献标志码**: A

定义 1　设 X 是度量空间,T 是 X 到 X 中的映射,如果存在一个数 α,$0<\alpha<1$,使得对所有的的 $x,y\in X$,有

$$\mathrm{d}(Tx,Ty)\leqslant\alpha\cdot\mathrm{d}(x,y)$$

则称 T 为压缩映射[1].

定理 1(压缩映射定理)　若 f 是从 X 到 X 的压缩映射,则存在 $X^*\in X$,使得 $f(X^*)=X^*$[2].

定理 2　设函数 $f(x,y)$ 在带状域 $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<y<\infty$ 中处处连续,且处处有关于 y 的偏导数 $f'_y(x,y)$. 如果还存在常数 m 和 M,满足

$$0<m\leqslant f'_y(x,y)\leqslant M,m<M$$

则方程 $f(x,y)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上必有唯一的连续函数 $y=\varphi(x)$ 作为解[1],即

$$f(x,\varphi(x))\equiv 0,x\in[a,b]$$

推论 1　设函数 $f(x,y)$ 在带状域 $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<y<\infty$ 中处处连续,且处处有关于 y 的偏导数 $f'_y(x,y)$. 如果还存在常数 m 和 M,满足

$$m\leqslant f'_y(x,y)\leqslant M<0,m<M$$

则方程 $f(x,y)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上必有唯一的连续函数 $y=\varphi(x)$ 作为解,即

$$f(x,\varphi(x))\equiv 0,x\in[a,b]$$

证明　在完备的度量空间 $C[a,b]$(在区间 $[a,b]$ 上所有连续函数的集合)中作映射 T,使得对任意的函数 $\varphi(x)\in C[a,b]$,有 $T(\varphi(x))=\varphi(x)-\frac{1}{m}f(x,\varphi(x))$,由推论 1 条件知 $f(x,y)$ 在带状域中是连续的,故推知 $T(\varphi(x))$ 亦连续,即 $T(\varphi(x))\in C[a,b]$,所以 T 是 $C[a,b]$ 到自身的映射.

下证此映射是压缩映射.

任取 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in C[a,b]$,根据微分中值定理[3]知

$$\begin{aligned}|T(\varphi_1(x))-T(\varphi_2(x))| &= |\varphi_1(x)-\frac{1}{m}f(x,\varphi_1(x))-\varphi_2(x)+\frac{1}{m}f(x,\varphi_2(x))| = \\ &|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)-\frac{1}{m}(f(x,\varphi_1(x))-f(x,\varphi_2(x)))| =\end{aligned}$$

收稿日期:2012 -05 -31;**修回日期**:2012 -06 -13.
* **基金项目**:自然科学基金(cstc2011jjAA00003).

作者简介:费伦帅(1991-),男,江西瑞昌人,从事基础数学研究.

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)-\frac{1}{m}f'_y(x,\xi(x))\cdot(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\right| =$$

$$\left|(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\cdot\left(1-\frac{f'_y(x,\xi(x))}{m}\right)\right| \tag{1}$$

其中 $\xi(x)=\varphi_1(x)+\theta(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))$，$0\leqslant\theta\leqslant1$. 由于 $m\leqslant f'_y(x,y)\leqslant M<0$，故知

$$0<\frac{M}{m}\leqslant\frac{f'_y(x,\xi(x))}{m}\leqslant1\Rightarrow0\leqslant1-\frac{f'_y(x,\xi(x))}{m}\leqslant1-\frac{M}{m} \tag{2}$$

由式(2)得式(1)$\leqslant|\varphi_1(x)-\varphi_1(x)|\cdot(1-\frac{M}{m})$.

令 $\alpha=1-\frac{M}{m}$，则可知 $0<\alpha<1$，且

$$|T(\varphi_1(x))-T(\varphi_2(x))|\leqslant\alpha\cdot|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|$$

又因为在 $C[a,b]$ 中，$\mathrm{d}(\varphi_1(x),\varphi_2(x))=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|$，由此知

$$\mathrm{d}(T(\varphi_1(x)),T(\varphi_2(x)))\leqslant\mathrm{d}(\varphi_1(x),\varphi_2(x))$$

所以得出，T 是压缩映射，由定理 1 知 存在唯一的 $\varphi(x)\in C[a,b]$ 满足 $T(\varphi(x))=\varphi(x)$，即

$$T(\varphi(x))=\varphi(x)-\frac{1}{m}f(x,\varphi(x))\equiv\varphi(x)$$

则有

$$f(x,\varphi(x))\equiv0,x\in[a,b]$$

猜想　设函数 $f(x,y)$ 在带状域 $a\leqslant x\leqslant b$，$-\infty<y<\infty$ 中处处连续，且处处有关于 y 的偏导数 $f'_y(x,y)$. 如果还存在常数 m 和 M，满足

$$0<m\leqslant f'_y(x,y)\text{ 或 }f'_y(x,y)\leqslant M<0$$

则方程 $f(x,y)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上必有唯一的连续函数 $y=\varphi(x)$ 作为解，即

$$f(x,\varphi(x))\equiv0,x\in[a,b]$$

参考文献：

[1] 程其襄，张奠宙. 实变函数与泛函分析基础[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2010

[2] 孙一丹，翟伟利. 压缩映像原理及其应用[J]. 科技信息，2011，24：193

[3] 李勇，罗瑞，王玲. Lagrange 中值定理得一个推广[J]. 重庆工商大学学报：自然科学版，2011(10)：489-490

The Existence of Theorem and Generalization in Some Functions with Certain Condition Is Proved by Using Compression Mapping Principle

FEI Lun-shuai，KUANG Jie

(School of Mathematics，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China)

Abstract：Compression mapping is a kind of special corresponding relation between metric spaces，the stability point in set X，fixed point，can be found through this kind of corresponding relation，as a result，we know that the only fixed point can be obtained under certain condition by compression mapping theorem，on the basis of the existed theorem proofs，by changing some conditions，new proposition is derived and then differential mean value theorem is used to prove its validity.

Key words：compression mapping；metric space；fixed point existence theorem

责任编辑：李翠薇