文章编号:1672 -058X(2013)01 -0001 -05

截断调和 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子*

刘　元[1], 丁宣浩[2]

(1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004;
2. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:引入截断调和 Hardy 空间 $h_n^2(T) = H^2(T) \oplus \{\bar{\zeta},\bar{\zeta}^2,\cdots,\bar{\zeta}^n\}^{\vee}$,并研究其上的 Toeplitz 算子的谱的性质和两个 Toeplitz 算子的半交换性问题;得到了谱包含定理与两个 Toeplitz 算子等于一个 Toeplitz 算子的充分必要条件;这些条件与经典 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子的性质出现了差异.

关键词:截断 Hardy 空间;Toeplitz 算子;谱;半换位子

中图分类号:O177. 1　　　**文献标志码**: A

1　基础知识

近来,有许多学者研究调和 Bergman 空间 $b^2 = L_a^2 \oplus \overline{\omega L_a^2}$上的 Toeplitz 算子[1],得到了许多与经典 Hardy 空间和解析 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子不同的性质. 在经典 Hardy 空间[2],对于任意两个具有有界符号的 Toeplitz 算子 T_f 和 T_g,使得 $T_fT_g = T_{fg}$成立的充分必要条件是 f 共轭解析或 g 解析. 在解析 Bergman 空间,如果假设符号是有界调和函数,使得 $T_fT_g = T_{fg}$成立的充分必要条件与经典 Hardy 空间的情形相同. 但是在调和 Bergman 空间,即使符号 f 和 g 是解析的,使得 $T_fT_g = T_{fg}$成立的充分必要条件却必须是 f 或 g 是常数[3]. 如果符号都是解析函数,在经典 Hardy 空间和解析 Bergman 空间上,$T_fT_g = T_gT_f$ 总是成立[2,4]. 但是在调和 Bergman 空间,$T_fT_g = T_gT_f$ 成立的充要条件是 f 与 g 的线性组合是常数,而 $T_{\bar{f}}T_g = T_{\bar{f}g}$一般是不成立的[5,6]. 由于在一维情形,$H^2(T) \oplus \overline{\zeta H^2(T)} = L^2(T)$,从 $L^2(T)$ 到 $H^2(T) \oplus \overline{\zeta H^2(T)}$的投影为恒等算子,此时 Toeplitz 算子就成了乘法算子. 因此受调和 Bergman 空间的启发,引入截断调和 Hardy 空间,并研究其上的 Toeplitz 算子. 此处,D 为复平面 C 上的开单位圆盘,它的边界为单位圆周 T,设 $d\sigma$ 是单位圆周 T 上的标准 Haar 测度. 经典 Hardy 空间 $H^2(T)$ 是由空间 $L^2(T)$ 中的解析函数构成的 Hilbert 空间. 为更清楚地讨论问题,用 ζ 表示在圆周 T 上的变量,用 z 表示在圆盘 D 中的变量. 容易知道,$L^2(T) = H^2(T) \oplus \overline{\zeta H^2(T)}$. 对任意的正整数 n,$\{\bar{\zeta},\bar{\zeta}^2,\cdots,\bar{\zeta}^n\} \subset \overline{\zeta H^2(T)}$,定义

$$W_n = \{\bar{\zeta},\bar{\zeta}^2,\cdots,\bar{\zeta}^n\}^{\vee},$$

其中$\{\cdot\}^{\vee}$表示$\{\cdot\}$的闭线性扩张.

定义 1　称

收稿日期:2012 -09 -27;**修回日期**:2012 -11 -01.
* **基金项目**:国家自然科学基金(11271388).
作者简介:刘元(1986-),女,河南驻马店人,硕士研究生,从事泛函分析研究.
** **通讯作者**:丁宣浩(1957-) ,男,四川开江人,教授,博士,从事泛函分析研究.

$$h_n^2 = H^2(T) \oplus W_n$$

为截断调和 Hardy 空间. 易知, $\{\cdots,\zeta^n,\cdots,\zeta^2,\zeta,\zeta^0,\bar{\zeta},\bar{\zeta}^2,\cdots,\bar{\zeta}^n\}^\vee$ 是 h_n^2 的正交基. 对 $\forall f\in h_n^2$, 有 Fourier 展开式 $f = \sum_{i=0}^{+\infty}\hat{f}(i)\zeta^i + \sum_{i=1}^{n}\hat{f}(-i)\bar{\zeta}^i$.

已经知道, 经典 Hardy 空间 $H^2(T)$ 的再生核为 $K_z(\omega) = \dfrac{1}{1-\bar{z}\omega}$, 调和 Hardy 空间的再生核为 $R_z(\omega) = K_z(\omega) + \overline{K_z(\omega)} - 1$. 定理 1 给出了截断调和 Hardy 空间的再生核公式.

定理 1　截断调和 Hardy 空间的再生核函数为 $R_z^{(n)}(\omega) = K_z(\omega) + \sum_{i=1}^{n}(z\bar{\omega})^i$.

证明　设 P 是从 $L^2(T)$ 到 $H^2(T)$ 上的正交投影, P_n 是从 $L^2(T)$ 到 $W_n = h_n^2(T)\ominus H^2(T)$ 上的正交投影, Q_n 是从 $L^2(T)$ 到 $h_n^2(T)$ 上的正交投影, 则 $Q_n = P + P_n$, 即对任意的 $f\in h_n^2(T)$, 有 $f = f_+ + f_-$, 其中, $f_+ = Pf$, $f_- = P_nf$. 显然, $f_+\in H^2(T)$, $f_-\in h_n^2(T)\ominus H^2(T)$, 且 $f_-(0)=0$, $f_+\perp f_-$.

由于 $R_z^{(n)}\in h^2(T)$, 显然, R_z 可以分解为 $R_z^n = R_z^+ + R_z^-$, 其中, $R_z^+\in H^2(T)$, $R_z^-\in h_n^2(T)\ominus H^2(T)$. 对任意的 $g\in H^2(T)$, 都满足 $g(z) = \langle g,K_z\rangle$, 则

$$f(z) = \langle f,R_z^{(n)}\rangle = \langle f_+ + f_-,R_z^+ + R_z^-\rangle = \langle f_+,R_z^+\rangle + \langle f_-,R_z^-\rangle$$

取 $f = f_+\in H^2(T)$, 则

$$f(z) = \langle f_+,R_z^+\rangle = (f_+,K_z)$$

所以

$$\langle f_+,R_z^+ - K_z\rangle = 0$$

由 f 的任意性知, 对任意的 $f\in H^2(T)$, 因为 $R_z^+ - K_z\in H^2(T)$, 所以 $R_z^+ - K_z = 0$, 即 $R_z^+ = K_z$.

取 $f_-\in h_n^2(T)\ominus H^2(T)$, 则 $\bar{f}_-\in\overline{h_n^2(T)\ominus H^2(T)}$, 且 $\overline{f_-}(0)=0$, 则

$$f(z) = \langle f,R_z^-\rangle = \langle\overline{R_z^-},\bar{f}\rangle = \overline{\langle\bar{f},\overline{R_z^-}\rangle} = \overline{\langle\overline{f_-},\overline{R_z^-}\rangle}$$

两边同时取共轭

$$\bar{f}(z) = \langle\overline{f_-},\overline{R_z^-}\rangle$$

又因为

$$\overline{f_-}(z) = \langle\overline{f_-},\overline{R_z^-}\rangle = \langle\overline{f_-},K_z - \sum_{k=n+1}^{\infty}(\omega\bar{z})^k\rangle$$

因为 $\overline{f_-}(0)=0$, 所以

$$\overline{f_-}(z) = \langle\overline{f_-},K_z\rangle = \langle\overline{f_-},K_z - \sum_{k=n+1}^{\infty}(\omega\bar{z})^k - 1\rangle$$

于是

$$\langle\overline{f_-},[\overline{R_z^-} - (K_z - \sum_{k=n+1}^{\infty}(\omega\bar{z})^k - 1)]\rangle = 0$$

由 f 的任意性知, 对任意的 $\bar{f}_-\in\overline{W_n}$, 因为 $\overline{R_z^-} - [K_z - \sum_{k=n+1}^{\infty}(\omega\bar{z})^k - 1]\in\overline{W_n}$, 所以 $\overline{R_z^-} - [K_z - \sum_{k=n+1}^{\infty}(\omega\bar{z})^k - 1] = 0$, 即 $\overline{R_z^-} = K_z - \sum_{k=n+1}^{\infty}(\omega\bar{z})^k - 1 = \sum_{k=1}^{n}(\omega\bar{z})^k$, 所以 $R_z = R_z^+ + R_z^- = K_z + \sum_{k=1}^{n}(\bar{\omega}z)^k$. 证毕.

易知, D 中每一点的计值泛函都是 $h_n^2(T)$ 上的有界线性泛函, 由 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理, 对任意的 $z\in D$, 都存在唯一的函数即核函数 $R_z^n\in h_n^2(T)$, 使得

$$f(z) = \langle f,R_z^{(n)}\rangle = \int_T f(\zeta)\,\overline{R_z^{(n)}(\zeta)}\,\mathrm{d}\sigma(\zeta),\ \zeta\in T$$

其中, 函数 $f\in h_n^2(T)$.

设 P 是从 $L^2(T)$ 到 $H^2(T)$ 上的正交投影,P_- 是从 $L^2(T)$ 到 $\overline{\zeta H^2(T)}$ 上的正交投影,P_n 是从 $L^2(T)$ 到 W_n 上的正交投影,$Q=P\oplus P_-$ 是从 $L^2(T)$ 到 $H^2(T)\oplus\overline{\zeta H^2(T)}$ 上的投影,此时 Q 为恒等算子,$Q_n=P\oplus P_n$ 是从 $L^2(T)$ 到 $h_n^2(T)$ 上的正交投影,易知在强算子拓扑意义下 $Q_n\to Q(n\to\infty)$. 对于 $f\in L^\infty(T)$,以 f 为符号的 $H^2(T)$ 上的 Toeplitz 算子 T_f 定义为 $T_fh=P(fh)$,其中 $h\in H^2(T)$[7]. 同样可以定义以 f 为符号的 $h_n^2(T)$ 上的 Toeplitz 算子.

定义 2　设 Q_n 是从 $L^2(T)$ 到 $h_n^2(T)$ 上的正交投影,对于任意的 $f\in L^\infty(T)$,以 f 为符号的 $h_n^2(T)$ 上的 Toeplitz 算子 $T_f^{(n)}$ 定义为:

$$T_f^n h = Q_n(fh)$$

其中 $h\in h_n^2(T)$. 容易知道,$T_f^{(0)}=T_f$.

有了再生核,$h_n^2(T)$ 上的 Toeplitz 算子也可以表示成如下积分算子的形式:

$$T_f^{(n)}h = \int_T f(\zeta)h(\zeta)\overline{R_z^{(n)}(\zeta)}d\sigma(\zeta),\zeta\in T$$

并且 $h_n^2(T)$ 中的函数 $f(\zeta)$ 可以通过 Poisson 积分将其延拓到圆盘内部,$f(z)$ 在圆盘内部也是调和的,并且 $\lim\limits_{\zeta\to 1}f(r\zeta)=f(\zeta)$ 对几乎所有的 $\zeta\in T$ 都是成立的.

经典 Hardy 空间 $H^2(T)$ 上的 Toeplitz 算子所对应的 Toeplitz 矩阵定义为单侧无穷矩阵 $\langle\lambda_{ij}\rangle$ 满足 $\lambda_{i+1,j+1}=\lambda_{ij}$,其中 $i,j(=0,1,2,\cdots)$. Toeplitz 矩阵的典型特点是平行于主对角线的元素是常数[8]. 类似地可以给出截断调和 Hardy 空间上 Toeplitz 算子所对应的 Toeplitz 矩阵的定义(定义 3).

定义 3　$h_n^2(T)$ 上的 Toeplitz 矩阵定义为单侧无穷矩阵 $\langle\lambda_{ij}\rangle$,满足

$$\lambda_{i+1,j+1} = \lambda_{ij}$$

其中 $i,j(=-n,-n+1,\cdots,0,1,2,\cdots)$.

在经典 $H^2(T)$ 空间,T_f 是 Toeplitz 算子的充要条件是 T_f 关于基 $\{\zeta^0,\zeta,\zeta^2,\cdots\}$ 的矩阵 $\langle\lambda_{ij}\rangle$ 是 Toeplitz 矩阵,如果满足条件,则 $\lambda_{i,j}=\alpha_{i-j}$,其中 $f=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\zeta^n$ 是 f 的 Fourier 展开. 类似地,$T_f^{(n)}$ 是 Toeplitz 算子的充要条件是 $T_f^{(n)}$ 关于基 $\{\bar\zeta^n,\cdots,\bar\zeta^2,\bar\zeta,\zeta^0,\zeta,\zeta^2,\cdots\}$ 的矩阵 $\langle\lambda_{ij}\rangle$ 是 Toeplitz 矩阵,如果满足条件,则 $\lambda_{i,j}=\alpha_{i-j}$,其中 $f=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\zeta^n$ 是 f 的 Fourier 展开.

在经典 Hardy 空间谱包含定理是成立的,自然有下面的问题,在截断调和 Hardy 空间 $h_n^2(T)$ 上谱包含定理是否成立.

2　谱包含定理

引理 1

(1) $P\zeta^k\bar\zeta^l=\begin{cases}\zeta^{k-l}, \text{if} & k\geqslant l\\ 0, \text{if} & k<l\end{cases}$.

(2) $P\zeta^k\bar\zeta^l=\begin{cases}\bar\zeta^{l-k}, \text{if} & l>k\\ 0, \text{if} & l\leqslant k\end{cases}$.

(3) $P\zeta^k\bar\zeta^l=\begin{cases}\bar\zeta^{l-k}, \text{if} & 1\leqslant l-k\leqslant n\\ 0, \text{if} & l-k<1 \text{ or } l-k>n\end{cases}$.

定理 2　如果 L 和 $T^{(n)}$ 分别为由同一个有界可测函数诱导的 L^2 上的乘法算子和 h_n^2 上的 Toeplitz 算子,则 $\Pi(L)\subset\Pi(T^{(n)})$,其中 $\Pi(L)$ 表示 L 的近似点谱.

证明 因为 Q_n 是从 $L^2(T)$ 到 $h_n^2(T)$ 上的正交投影,又乘法算子 L 是 Toeplitz 算子 Q_nLQ_n 的极限,即 $Q_nLQ_n \to L(n\to\infty)$,因此若 $T^{(n)}$ 是对应于 L 的 Toeplitz 算子,则 $T^{(n)}Q_n \to L(n\to\infty)$. 假设对任意的正整数 ε 都存在相应的单位向量 f_ε 使得 $\| Lf_\varepsilon \| < \varepsilon$,则由推断知 $Q_nf_\varepsilon \to f_\varepsilon(n\to\infty)$,$T^{(n)}Q_nf_\varepsilon \to Lf_\varepsilon(n\to\infty)$,所以 $\| Q_nf_\varepsilon \| \to 1(n\to\infty)$,$\| T^{(n)}Q_nf_\varepsilon \| \to \| Lf_\varepsilon \| (n\to\infty)$. 因此若 0 是 L 的近似特征值,则 0 也是 $T^{(n)}$ 的特征值. 所以 $\Pi(L) \subset \Pi(T^{(n)})$. 证毕.

推论 1 若 f 是有界可测函数,则 $r(T_f^{(n)}) = \| T_f^{(n)} \| = \| f \|_\infty$.

证明 因为 L 是正规算子,$\| L \| = r(T^{(n)})$,由定理 2 知 $\| L \| \leqslant \| T^{(n)} \|$,容易知道 $\| T^{(n)} \| \leqslant \| L \| (= \| f \|_\infty)$,所以证得 $r(T_f^{(n)}) = \| T_f^{(n)} \| = \| f \|_\infty$. 证毕.

推论 2 若 f 是有界可测函数,$T_f^{(n)} = 0$,则 $f = 0$.

证明 由谱半径定义和推论 1 即可证得结论.

对于算子 A 和 B,如果 $AB = BA$,就称 A 和 B 是可交换的. 对于 Toeplitz 算子还有半交换性. 如果 $T_fT_g = T_{fg}$ 或 $T_gT_f = T_{fg}$,就称 Toeplitz 算子 T_f 和 T_g 是半可交换的. 容易看到

$$T_fT_g - T_gT_f = [T_fT_g - T_{fg}] - [T_gT_f - T_{fg}]$$

所以,由 Toeplitz 算子的两个半可交换可以推出可交换性.

在经典 Hardy 空间,任意两个具有有界符号的 Toeplitz 算子 T_f 和 T_g,使得 $T_fT_g = T_{fg}$ 成立的充分必要条件是 f 共轭解析或 g 解析. 在解析 Bergman 空间,如果假设符号是有界调和函数,使得 $T_fT_g = T_{fg}$ 成立的充分必要条件与经典 Hardy 空间的情形相同. 但是在调和 Bergman 空间,即使符号 f 和 g 是解析的,使得 $T_fT_g = T_{fg}$ 成立的充分必要条件却必须 f 或 g 是常数. 接下来将会发现,在截断调和 Hardy 空间,使得 $T_fT_g = T_{fg}$ 成立的充要条件与经典 Hardy 空间、解析 Bergman 空间和调和 Bergman 空间都不一样.

3 半换位子

定理 3 如果 f 和 g 是 T 上的有界函数,则两个 Toeplitz 算子的乘积 $T_f^{(n)}T_g^{(n)}$ 仍是 Toeplitz 算子的充分必要条件是 $f = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \hat{f}(k)\bar{\zeta}^k$ 且 $f \perp h_n^2$ 或 $g \in h_n^2$. 并且若条件成立,则有 $T_f^{(n)}T_g^{(n)} = T_{fg}^{(n)}$.

证明 先证充分性:设 $C = T_f^{(n)}T_g^{(n)}$,并且令 $\langle \gamma_{ij} \rangle$ 是算子 C 对应的矩阵. 设 f 和 g 的 Fourier 展开式分别为 $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_ie_i$,$g = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} b_je_j$,则 $T_f^{(n)}$ 和 $T_g^{(n)}$ 对应的矩阵为 $[a_{i-j}]$ 和 $[b_{i-j}]$. 因为

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k}b_{k-j}$$

所以

$$\begin{aligned}\gamma_{i+1,j+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{i+1-k}b_{k-j-1} = \\ & a_{i+1}b_{-j-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{i+1-k}b_{k-j-1} = \\ & a_{i+1}b_{-j-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k}b_{k-j} = \\ & a_{i+1}b_{-j-1} + \gamma_{ij}\end{aligned}$$

如果 g 解析,则对所有的 $h \in h_n^2$,有

$$T_f^{(n)}T_g^{(n)}h = T_f^{(n)}(gh) = Q_n(fgh) = T_{fg}^{(n)}h$$

所以得 $T_f^{(n)}T_g^{(n)} = T_{fg}^{(n)}$. 如果 $\bar{f}$ 解析,则

$$T_f^{(n)}T_g^{(n)} = (T_{g^*}^{(n)}T_{f^*}^{(n)})^* = T_{fg}^{(n)}$$

再证必要性:如果 $T_f^{(n)}T_g^{(n)}$ 是 Toeplitz 算子,则它对应的矩阵是 Toeplitz 矩阵,要使等式

$$\gamma_{i+1,j+1} = a_{i+1}b_{-j-1} + \gamma_{ij}$$

成立,必须有 $a_{i+1}b_{-j-1}=0$,其中 $i,j\geqslant -n$. 因此对所有的 $i\geqslant -n$,$a_{i+1}=0$ 或对所有的 $j\geqslant -n$,$b_{-j-1}=0$,即 $f=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\hat{f}(k)\bar{\zeta}^k$ 且 $f\perp h_n^2$ 或 $g\in h_n^2$. 证毕.

推论 3 若 $f,g\in h_n^2$,则 $T_f^{(n)}T_g^{(n)}=0$ 的充分必要条件是 f 或 g 等于零.

证明 充分性显然,只需证必要性. 若 $T_f^{(n)}T_g^{(n)}=0$,由于 0 也是 Toeplitz 算子,所以由定理 2 得 $f=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\hat{f}(k)\bar{\zeta}^k$ 且 $f\perp h_n^2$ 或 $g\in h_n^2$,并且 $fg=0$. 如果 $f=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\hat{f}(k)\bar{\zeta}^k$,则 $g=0$;如果 $g\in h_n^2$,则 $f=0$.

参考文献:

[1] MIAO J. Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces[J]. Integr Eqn Oper Theory,1997,27:426-438

[2] BROWN A,HALMOS P R. Algebraic properties of Toeplitz operators[J]. J Reine Angew Math,1963,213:89-102

[3] LEE Y J , ZHU K. Some differential and integral equations with applications to Toeplitz operators[J]. Integr Eqn Oper Theory, 2002,44:466-479

[4] AXLER S, CONWAY J B,MCDONALD G. Toeplitz operators on Bergman spaces[J]. Canadian Journal of Mathematics,1982,34: 466-483

[5] CHOE B R, LEE Y J. Commuting Toeplitz operators on the Harmonic Bergman Space[J]. Michigan Math J,1999,46:163-174

[6] CHOE B R, LEE Y J. Commutants of Analytic Toeplitz operators on the Harmonic Bergman Space[J]. Integral Equations Operator Theory,2004,50:559-564

[7] DOUGLAS R G. Banach Algebra Techniques in Operator Theory[M]. New York:Academic Press,1972

[8] HALMOS P R. A Hilbert Space Problem Book[M]. New York:Springer-Verlag,1974

Toeplitz Operators on the Cutoff Harmonic Hardy Space

LIU Yuan[1] ,DING Xuan-hao[2]

(1. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology,Guangxi Guilin 541004,China;

2. School of Mathematics and Statistics,Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In this paper, we introduce the cutoff harmonic Hardy space $h_n^2(T)=H^2(T)\oplus\{\bar{\zeta},\bar{\zeta}^2,\cdots,\bar{\zeta}^n\}^\vee$ and study the property of spectra of Toeplitz operator and semi-commutator of two Toeplitz operators acting on it. We also obtain the spectral inclusion theorem and necessary and sufficient conditions on that two Toeplitz operators equal one Toeplitz operator, and these conditions are different from the property of Toeplitz operator on classical Hardy space.

Key words: cutoff Hardy space; Toeplitz operator; spectra; semi-commutator

责任编辑:李翠薇