

文章编号:1672-058X(2012)12-0038-06

基于 t Copula 的中国股市指数组合 VaR 估计及其评价*

李宝良

(华侨大学 经济与金融学院,福建 泉州 362320)

摘要:传统的联合正态分布假设无法刻画金融市场尾部相依情况,导致投资组合 VaR 的低估。采用 t Copula 克服了这一问题;并对上证指数和深证指数构成的等权重投资组合的 95% 和 99% VaR 进行了验证;结果表明,基于 t Copula 模型的 VaR 表现要优于传统的方差-协方差分析法、历史模拟法和蒙特卡罗模拟法以及基于动态条件相关系数模型的估计方法。

关键词:在险价值;尾部相依;关联结构

中图分类号:F830

文献标志码:A

0 导 言

在险价值(Value at Risk, VaR)是金融市场风险管理中最著名的风险测度,被众多的金融机构采纳为风险管理标准。常用的 VaR 估计方法有 3 种:方差-协方差法、历史模拟法和蒙特卡罗模拟法^[1],其中方差-协方差法和蒙特卡罗模拟法通常假定资产收益率服从联合正态分布,这简化了 VaR 的估计,但是也是潜在缺陷的所在。

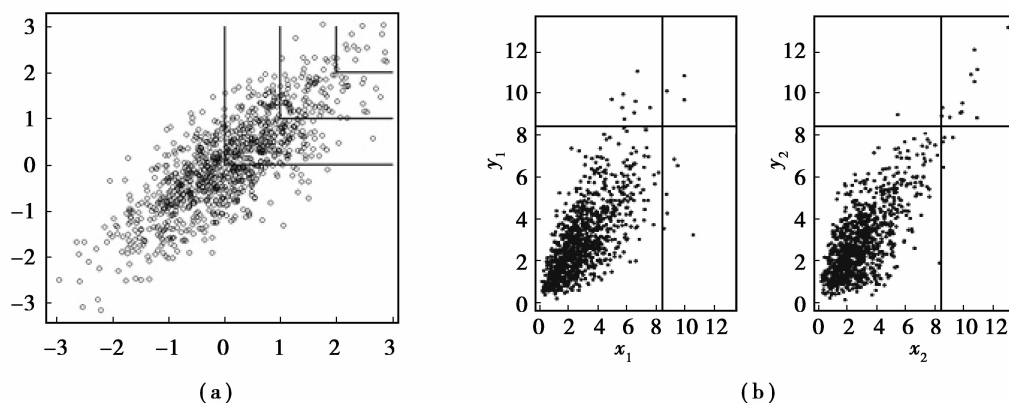


图 1 联合正态分布的尾部相依性与 VaR

注:图 1(a)中由相关系数为 0.8 的二元正态分布产生,可以看出越靠右上角相关系数越小,即联合正态分布不存在尾部相依特征;图 1(b)中由两个相同的边缘分布 Gamma(3,1)和相同线性相关系数(0.7),但不同相依结构产生的,图 1(b)左边为正态 Copula,右边为 Gumbel Copula。

收稿日期:2012-04-20;修回日期:2012-05-15.

* 基金项目:华侨大学高层次人才科研启动经费项目(11BS115).

作者简介:李宝良(1980-),男,福建泉州人,讲师,博士,从事应用金融计量研究.

金融市场的经验研究表明,资产收益率并不服从联合正态分布。特别地,当金融市场出现暴跌时,金融资产之间的联系更加紧密;当一个市场暴跌时,其他市场也会跟着暴跌^[2],即存在着尾部相依特征。这种情况是联合正态分布以及线性相关系数所无法刻画的,如图 1(a)所示,给定某个相关系数的联合正态分布,不存在尾部相依特征。

尾部相依特征对 VaR 估计具有重要的意义:如果金融资产之间存在尾部相依,则由此构成投资组合的 VaR 会比两个市场相互独立的情况来得大,即采用联合正态分布会导致 VaR 的低估。图 1(b)说明了这个问题^[3]:从金融机构的角度看,右半图表示的损失情况对金融机构的威胁更大,因为巨额损失倾向于同时发生,这可能会导致金融机构经营面临困难。

因此,考虑金融资产之间的尾部相依有助于提高投资组合 VaR 估计的准确性。此处应用 Copula 理论来考虑金融资产之间的尾部相依特征,将其应用于衡量由深沪股市指数构成的投资组合 VaR 的估计,并通过事后检验比较了基于 Copula 的 VaR 估计与传统的方差-协方差分析法、历史模拟法和蒙特卡罗模拟法以及基于 DCC-MGARCH 模型的估计方法的表现。

1 基于 t Copula 模型的 VaR 估计

根据 Copula 理论,投资组合中不同资产收益率的边缘分布可以独立估计,然后通过一个 Copula 函数连接成一个联合分布函数,同时保留边缘分布的特征。比传统的多元联合正态分布,可以构造更加符合现实的多维密度函数。例如,正态相依可以通过选择正态 Copula 函数得以保留,同时其边缘分布可以一般化,如 t 分布或其他分布,由此可以得到与实际数据更为接近的联合分布,从而可以建立起更为有效的风险管理模型^[4]。

所谓的 Copula 函数 $C(u_1, \dots, u_d)$ 本质上是定义在 $[0, 1]^d$ 区间上的一个联合分布函数。Copula 理论表明,每个连续的联合分布函数 $H(x_1, \dots, x_d)$ 都可以找到唯一一个与之相对应的 Copula 函数(Nelson, 2006):

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_d) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) = \\ &P(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_d(X_d) \leq F_d(x_d)) = \\ &C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = \\ &C(u_1, \dots, u_d) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $u_i = F_i(x_i)$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。定义广义反函数 $x_i = F_i^{-1}(u_i)$, 由式(1)变形可以得到

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

Copula 函数 $C(\cdot, \dots, \cdot)$ 反映了随机向量 (X_1, \dots, X_d) 之间的相依结构。

由上述的 Copula 函数可以很方便地计算随机变量之间的尾部相依系数,用于刻画变量之间的尾部相依特征,衡量当一个随机变量大幅度增加或者大幅度减少时,与之关联的另一个随机变量也发生大幅度增加或者大幅度减少的概率。如随机向量 (X, Y) 的联合分布函数为 H , 边缘分布函数分别为 F 和 G , 令

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(F(X) < u | G(Y) < u)$$

如果极限 λ_L 存在且不等于 0, 则称随机向量 (X, Y) 下尾渐近相关, 否则称其为下尾渐近独立。根据数学推导可知, λ_L 可以由 Copula 函数计算出来:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}$$

相应地, 可以定义和计算随机变量之间的上尾相依系数 λ_U 。尾部相依系数与投资组合在险价值(Value at Risk, VaR)估计紧密相连:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(F(X) < u | G(Y) < u) =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} P(X < F^{-1}(u) \mid Y < G^{-1}(u)) =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} P(X < \text{VaR}_u(X) \mid Y < \text{VaR}_u(Y))$$

因此,了解金融资产之间的尾部相依特征在金融领域尤其是在风险管理中极为有用。

通过计算可知,联合正态分布的尾部相依系数 $\lambda_U = \lambda_L = 0$,即正态 Copula 是尾部渐进独立的,与图 1(a) 一致,因此正态分布无法用于刻画具有尾部相依的随机变量的特征。为了考虑金融资产之间的尾部相依特征,考虑了 t Copula 函数,图 2 展示了二元正态 Copula 和 t Copula 的差别。由图 2 中可知,在相关系数相等的情况下,正态 Copula 和 t Copula 在 4 个顶角特征有所不同,而在分布的中部有相似的特征。相比于正态 Copula 而言,t Copula 对 4 个顶角分配了更高的概率,即出现极端值的可能性比正态 Copula 大。

如果使用 t Copula 来表示一个由两种资产组成的投资组合的联合分布,则顶角(0,0)表示的是这两种资产同时暴跌的情况;相应地,顶角(1,1)表示的是这两种资产同时暴涨的情况。表 1 给出了不同自由度和线性相关系数下,t Copula 函数的尾部相依系数:即使线性相关系数 $\rho \leq 0$,t Copula 仍然存在渐进的尾部相依特征,尾部相依系数随自由度的增加而减少,随线性相关系数的增加而增加。因此,t Copula 可以用于刻画具有尾部相依特征的金融市场的相依结构。Kole 等(2007)的研究表明,在拟合股票、债券的组合风险时,t Copula 比正态 Copula 要准确^[4]。

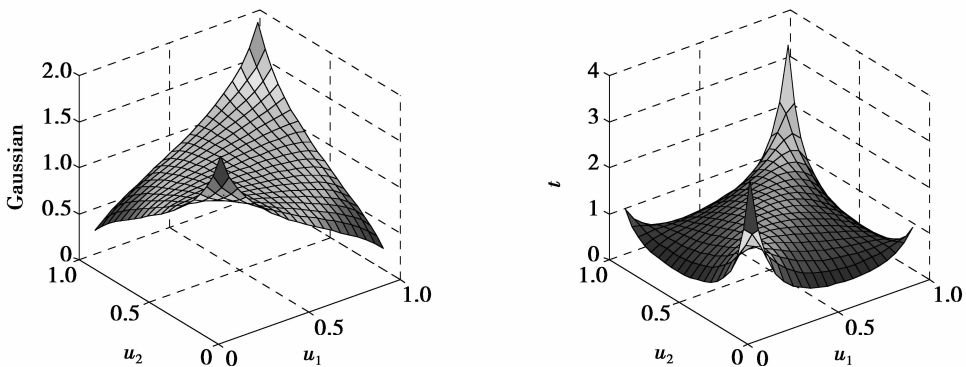


图 2 二维正态 Copula 和 t Copula

注:左边为相关系数为 0.3 的二维正态 Copula 的密度函数,右边为相关系数为 0.3,自由度为 3 的 t Copula 的密度函数

表 1 t Copula 的尾部相依系数

v/ρ	-0.5	0	0.5	0.9	1
2	0.06	0.18	0.39	0.72	1
4	0.01	0.08	0.25	0.63	1
10	0.0	0.01	0.08	0.46	1
∞	0	0	0	0	1

根据 Copula 理论,连续的多元联合分布函数可以分解成一元边缘分布和将一元边缘分布连接成多元联合分布函数的 Copula 函数。据此,可以将投资组合的 VaR 分解成两部分:单个金融资产的风险和由投资组合产生的风险,其中单个金融资产的风险可以完全由它们各自的边缘分布来刻画,而由投资组合产生的风险则由连接它们的 Copula 函数来刻画。令 x_t 和 y_t 分布表示资产在 t 时期的对数收益率, w 为投资组合中 x_t 资产的权重,因此,投资组合的收益率为 $z_t = wx_t + (1 - w)y_t$ 。 x_t 和 y_t 的条件联合分布函数为

$$H_t(x, y \mid I_{t-1}) = C_t(F_t(x \mid I_{t-1}), G_t(y \mid I_{t-1}) \mid I_{t-1})$$

投资组合的收益率 z_t 的分布函数由下式给定:

$$\Pr(Z \leq z_t) = \Pr(wX + (1 - w)Y \leq z_t) =$$

$$\iint_{wX+(1-w)Y \leq z} C_t(F_t(x | I_{t-1}), G_t(y | I_{t-1}) | I_{t-1}) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\frac{1}{w}z - \frac{1-w}{w}y_t} \{c_t(F_t(x | I_{t-1}), G_t(y | I_{t-1}) | I_{t-1}) \cdot f_t(x | I_{t-1}) dx\} g_t(y | I_{t-1}) dy \quad (2)$$

因此,给定信息集 I_{t-1} ,该投资组合在下一期置信度为 p 的 VaR 的估计值等于 z_t^* , z_t^* 是 $\Pr(Z \leq z_t^*) = 1 - p$ 的解,不同初始投资额的 VaR 的估计值等于 z_t^* 乘以相应的初始投资额。然而,式(2)通常情况下不存在显式解。求解式(2)的一个办法是使用蒙特卡罗模拟方法进行计算,实际上蒙特卡罗模拟方法在 VaR 估计中已经得到了广泛的应用。

根据上述的分析,估计投资组合 VaR 的一般步骤可以归纳如下:①设定边际分布,使用资产收益率的数据对边缘分布函数进行拟合,估计边缘分布的相关参数,并且得到相应的边缘分布信息;②根据所得的边缘分布信息对 t Copula 函数进行拟合,得到 Copula 函数参数的估计;③利用前面两步的估计结果,得到投资组合资产的联合分布函数,使用随机数据生成器产生投资组合对数收益率,模拟未来可能产生的大量情形;④将蒙特卡罗模拟所得的投资组合收益率由小到大排序,相应分位数所对应的收益率即为所要估计的 VaR。

采用 t Copula 函数作为深沪股市相依结构的刻画,对深沪股市指数收益率这两个风险因子的联合分布进行建模,采用蒙特卡罗模拟方法估计了由上证指数和深证指数构成的等权重投资组合的 95% 和 99% VaR,并通过多种事后检验方法比较了基于 t Copula 的 VaR 估计的表现。作为比较的基准,此处选择了传统方差-协方差分析法、历史模拟法和蒙特卡罗模拟法以及 DCC-GARCH 模型的 VaR 估计方法。此处考虑了 3 种事后检验:失效次数检验、Kupiec 似然比检验和 Christoffersen 条件独立性检验^[5],这些事后检验从不同的方面衡量了各种 VaR 的表现。

2 深沪股市 VaR 估计及其评价的实证分析

随着证券市场的发展,深沪股市已经成为投资者投资的重要渠道,VaR 的准确估计对于投资者管理风险具有深远的意义^[6]。此处以深圳和上海两个交易所的 A 股指数每日收盘价数据作为研究对象,选取从 1997-01-02—2011-12-30 深证 A 股成分指数(SZA)和上证 A 股综合指数(SHA)的每日收盘价数据为样本,数据来源于 Wind 数据库。这个样本排除了涨跌停板限制的实施对股市的影响,同时包括了中国股市几次大涨与大跌,能够较好地衡量各个 VaR 估计方法的表现。

根据上述估计基于 Copula 的 VaR 的一般步骤,首先估计深圳成分指数和上证指数收益率的边缘分布。为此,采用 AR-GJR-t-GARCH 来刻画深沪股市收益率的边缘分布,该模型考虑了我国股市的一些典型的经验特征事实^[7]:深证成分指数和上证综合指数日对数收益率呈现尖峰厚尾分布;与大多数的金融资产的收益率时间序列一样,深证成分指数和上证综合指数日对数收益率都呈现出一定程度的自相关;同样地,与大多数的金融资产的收益率时间序列一样,深证成分指数和上证综合指数日对数收益率都存在条件异方差的特征;熊市时波动性变大,深沪股市可能存在不对称的波动性效应。相关参数的估计结果如表 2 所示。

对标准化残差序列进行检验表明,在 5% 的显著水平上,Ljung-Box 检验和 ARCH-LM 检验分别拒绝了标准化残差序列自相关和 ARCH 效应的原假设。因此,AR-GJR-t-GARCH 模型对深圳成指和上证综合指数收益率序列边缘分布的刻画是充分的。

其次,由上述估计得到深沪两市股市指数收益率的边缘分布,使用最大似然法估计 t Copula 函数的相关参数。表 3 给出了估计结果,相关的参数在 1% 的水平上都是显著的,表明我国的深沪股市存在高度相关性以及尾部相依特征。深沪股市同处中国大陆同一个宏观市场环境,受共同因素的影响,在结构与各项法规制度等方面都没有太大的差异,一般情况下会同时上涨或下跌,因此具有很强的联动性。

表 2 收益率边缘分布参数估计

变 量	深圳成指			上证指数		
	系数	标准误	T 统计量	系数	标准误	T 统计量
C	0.000 1	0.000 2	0.537 9 ^a	0.000 2	0.000 2	1.077 0 ^a
AR(1)	0.028 6	0.018 5	1.548 0	-	-	-
AR(3)	0.056 9	0.018 3	3.102 4 [*]	0.071 2	0.018 2	3.905 5 [*]
AR(4)	0.039 1	0.018 2	2.1473 [*]	0.039 8	0.018	2.207 6 [*]
AR(6)	-	-	-	0.034 3	0.017 8	1.922 0 [*]
AR(10)	-	-	-	0.035 9	0.017 3	2.078 3 [*]
K	0.000 1	0.000 1	3.922 8 ^{b*}	0.000 1	0.000 1	4.133 2 ^{b*}
GARCH(1)	0.882 0	0.013 0	67.992 2 [*]	0.874 7	0.013 8	63.403 5 [*]
ARCH(1)	0.081 1	0.014 3	5.682 6 [*]	0.072 1	0.015 1	4.789 1 [*]
Leverage(1)	0.054 2	0.020 4	2.661 5 [*]	0.086 6	0.022 3	3.878 3 [*]
DoF	5.339 9	0.551 0	9.690 6 [*]	4.838 1	0.440 3	10.987 6 [*]

注: * 表示该参数在 5% 的水平上是显著的;由于只保留 4 位小数,使得 a、b 的 t 统计量与表格中的数据有所偏差。

表 3 t Copula 模型参数估计

参数	估计值	标准误	t 值
ρ	0.939 6	0.002 4	395.797 9 ^{***}
ν	3.202 7	0.325 8	9.829 9 ^{***}

注: * * * 表示系数的显著水平为 1%。

最后,在上述边缘分布和相依结构估计的基础上,采用蒙特卡罗模拟方法估计了上证综指和深证成指指数收益率等权重投资组合的 95% 和 99% VaR,并采用事后检验方法将其与其他 VaR 估计方法进行比较。

表 4 给出了各种估计方法所估计的 95% 置信度下的 VaR 在事后检验比较中的表现,可以看出,基于 t Copula 模型的蒙特卡罗模拟法估计的 VaR 满足所有的要求,是这些模型中最好的;而基于 DCC - MGARCH 模型的估计方法所得到的结果则是次优的。就平均失效次数而言,在 5% 的显著性水平下,只有基于 t Copula 模型的蒙特卡罗模拟法所估计的投资组合 VaR 序列满足要求,这点可以从 Kupiec 检验得到验证, Kupiec 检验拒绝了方差 - 协方差分析法、历史模拟法和蒙特卡罗模拟法所估计的 VaR 序列。而所有的模型都不能拒绝独立性检验;条件独立性检验的结果与 Kupiec 检验一致,实际上条件独立性检验是 Kupiec 检验和独立性检验的综合,由此可以看出,被拒绝的模型问题不在于独立性,而在于失效次数太多。

表 4 VaR(95%) 事后检验

模型/检验	N/T 检验	Kupiec 检验	独立性检验	条件独立性检验
MC with t Copula	0.039 0	0.097 4	0.251 6	0.131 2
Analytic VoV	0.087 0	0.000 0	0.307 3	0.000 0
Historical Simulation	0.098 0	0.000 0	0.119 4	0.000 0
Traditional Monte Carlo	0.087 0	0.000 0	0.307 3	0.000 0
DCC - MGARCH	0.055 0	0.047 9	0.098 4	0.197 7

表 5 给出了各种估计方法所估计的 99% 置信度下 VaR 在事后检验比较中的表现,结论与 95% 置信度下的 VaR 估计结果基本一致。

表 5 VaR(99%) 事后检验

模型/检验	N/T 检验	Kupiec 检验	独立性检验	条件独立性检验
MC with t Copula	0.007 0	0.313 6	0.736 9	0.568 8
Analytic VoV	0.048 0	0.000 0	0.028 2	0.000 0
Historical Simulation	0.030 0	0.000 0	0.788 2	0.000 0
Traditional Monte Carlo	0.047 0	0.000 0	0.022 9	0.000 0
DCC - MGARCH	0.019 0	0.011 0	0.359 0	0.025 8

综合以上的分析可以看出,将基于 Copula 模型蒙特卡罗模拟方法的估计结果与传统的多元联合正态分布假设下的估计结果的比较表明,t Copula 函数在投资组合 VaR 的度量中表现要优于多元联合正态分布和 DCC-MGARCH 模型,表明 t Copula 可以更有效地捕捉极值事件。

3 结论和展望

分析表明,传统的联合正态分布假设无法充分刻画金融市场的特征,通过采用 Copula 函数可获得更符合实际的联合分布函数,提高模型预测的准确性。基于深沪股市投资组合 VaR 实证研究表明,采用 t Copula 函数有助于克服传统的基于联合正态分布假设导致的 VaR 低估的问题,事后检验表明该方法的表现要优于原有的其他估计方法。因此,考虑我国金融市场的尾部相依结构及其对 VaR 估计的影响,有助于投资者更好地管理金融市场的风险。

考虑了二元 Copula 函数在风险管理中的应用。实际的金融市场存在着众多的金融资产,二元 Copula 不足以刻画由众多资产构成的投资组合收益率的分布,需要扩展多元 Copula 函数^[8]。多元 Copula 对计算能力提出了挑战,一个解决办法是将投资组合分成不同的板块,板块之间采用一个 Copula 函数来刻画,板块之内采用其他 Copula 函数来刻画,由此可以降低 Copula 函数的维数及其对计算能力的要求。考虑了基于 t Copula 的 VaR 估计与原有的估计方法的表现,比较不同的 Copula 函数对 VaR 估计的表现,也是未来的一个扩展研究方向。

参考文献:

- [1] 黄海,卢祖帝. Value-at-Risk 的主要计算方法述评[J]. 管理评论,2003(7):31-36
- [2] ANG A, CHEN J. Asymmetric Correlations of Equity Portfolios[J]. Journal of Financial Economics, 2002, 63:443-494
- [3] SHANG C C, RUEY S T. A Copula-based Approach to Option Pricing and Risk Assessment[J]. Journal of Data Science, 2008(6):273-301
- [4] KOLE E, KOEDIJK K, VERBEEK M. Selecting copulas for risk management[J]. Journal of Banking & Finance, 2007, 31(8): 2405-2423
- [5] CHRISTOFFERSEN P, HAHN J, INOUE A. Testing and Comparing Value-at-Risk Measures[J]. Journal of Empirical Finance, 2001(8):325-342
- [6] 王永杰,陈成,苏振华. 股指期货市场强行平仓风险估计[J]. 重庆工商大学:自然科学版,2011,28(3):261-264
- [7] 吴振翔,陈敏,叶五一,等. 基于 Copula-Garch 的投资组合风险分析[J]. 系统工程理论与实践,2006(3):45-52
- [8] GENEST C, GENDRON M, BOURDEAU B M. The Advent of Copulas in Finance[J]. The European Journal of Finance, 2009:1-10