文章编号:1672-058X(2012)12-0011-04

一类二阶常系数微分方程特解的教学探讨*

张守贵
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:利用待定系数法讨论了求解一类二阶常系数微分方程的特解,得到了求解该类问题的一般公式,并给出了证明和算例.

关键词:二阶常微分方程;特解;公式
中图分类号:O175.1　　**文献标志码**:A

求解二阶常系数线性常微分方程是常微分方程和高等数学的一个重要内容,而教材中介绍的方法主要有比较系数法、复数法、拉普拉斯变换法与常数变易法等[1-6]. 但是这些方法的运算量都比较大. 对一类特殊的二阶常系数非齐次线性常微分方程,给出一种直接求特解的一般公式,将使得求特解变得更容易,学生更容易掌握该方法.

二阶常系数非齐次线性常微分方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+qx=f(t) \tag{1}$$

这里,p,q 是常数,$f(t)$ 为连续函数. 文献[7]给出了 $f(t)=A\mathrm{e}^{\lambda t}$(其中 A、λ 为确定的实常数)时求特解的公式,使用非常方便. 将其结果进行推广,得到方程中的 $f(t)$ 取两种常见形式时求特解的公式.

1　$f(t)=A\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$ 型

考虑方程(1)所对应的齐次线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+qx=0 \tag{2}$$

其特征方程为

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{3}$$

如果记 $F(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q$,原方程的特解 $\tilde{x}$ 可由以下定理得到.

定理 1　如果 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 不是特征方程的根,则 $\tilde{x}=\mathrm{Re}\left\{\frac{A}{F(\alpha+\mathrm{i}\beta)}\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)\right\}$;如果 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是特征方程的单根,则 $\tilde{x}=\mathrm{Re}\left\{\frac{A}{F'(\alpha+\mathrm{i}\beta)}t\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)\right\}$;如果 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是特征方程的重根,则 $\tilde{x}=\mathrm{Re}\left\{\frac{A}{F''(\alpha+\mathrm{i}\beta)}t^2\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)\right\}$.

下面对 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是单根的情形给予证明,其他情形同理可证.

收稿日期:2012-04-27;**修回日期**:2012-06-04.
* **基金项目**:国家自然科学基金资助项目(11101454);重庆市教委科技项目(KJ100621).
作者简介:张守贵(1973-),男,四川泸县人,讲师,在读博士,从事微分方程数值解研究.

证明 为求非齐次方程(1)的一个特解,用复数法先求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=Ae^{(\alpha+i\beta)t} \tag{4}$$

的特解. 由于 $\alpha+i\beta$ 是特征方程(3)的单根,则令其特解为

$$\tilde{x}=Bte^{(\alpha+i\beta)t} \tag{5}$$

$$\tilde{x}'=Be^{(\alpha+i\beta)t}+B(\alpha+i\beta)te^{(\alpha+i\beta)t} \tag{6}$$

$$\tilde{x}''=2(\alpha+i\beta)Be^{(\alpha+i\beta)t}+(\alpha+i\beta)^2Bte^{(\alpha+i\beta)t} \tag{7}$$

将式(5)(6)和(7)代入方程(1)得

$$2(\alpha+i\beta)Be^{(\alpha+i\beta)t}+(\alpha+i\beta)^2Bte^{(\alpha+i\beta)t}+p[Be^{(\alpha+i\beta)t}+$$
$$(\alpha+i\beta)Bte^{(\alpha+i\beta)t}]+qBte^{(\alpha+i\beta)t}=Ae^{(\alpha+i\beta)t}$$

即 $$[2(\alpha+i\beta)+p]Be^{(\alpha+i\beta)t}+[(\alpha+i\beta)^2+p(\alpha+i\beta)+q]Bte^{(\alpha+i\beta)t}=Ae^{(\alpha+i\beta)t}$$

$$B=\frac{A}{2(\alpha+i\beta)+p}=\frac{A}{F'(\alpha+i\beta)}$$

则 $\tilde{x}$ 的实部 $\mathrm{Re}\left\{\frac{A}{F'(\alpha+i\beta)}e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)\right\}$就是原方程(1)的解.

例1 求方程$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+3x=e^{-t}\cos t$ 的特解.

解 因为 $-1+i$ 不是特征方程 $\lambda^2-2\lambda+3=0$ 的根,因此由定理1可以直接得到方程的特解

$$\tilde{x}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{F(-1+i)}e^{-t}(\cos t+i\sin t)\right\}=$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{5-4i}e^{-t}(\cos t+i\sin t)\right\}=$$

$$\left(\frac{5}{41}\cos t-\frac{4}{41}\sin t\right)e^{-t}$$

例2 求方程$\frac{d^2x}{dt^2}+x=e^t+\cos t$ 的特解.

解 因为1不是特征方程 $\lambda^2+1=0$ 的根,对应于方程$\frac{d^2x}{dt^2}+x=e^t$.

由定理1可以直接得到方程的特解

$$\tilde{x}_1=Re\left\{\frac{1}{F(1)}e^t\right\}=Re\left\{\frac{1}{2}e^t\right\}=\frac{1}{2}e^t$$

另一方面,由于 i 是特征方程 $\lambda^2+1=0$ 的根,对应于方程$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\cos t$.

由定理1可得到方程的特解

$$\tilde{x}_2=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{F'(i)}t(\cos t+i\sin t)\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2i}t(\cos t+i\sin t)\right\}=\frac{1}{2}t\sin t$$

再由叠加原理知,原方程的特解为 $\tilde{x}=\tilde{x}_1+\tilde{x}_2=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}t\sin t$.

例3 求方程$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=3e^{-2t}$的特解.

解 因为 -2 是特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ 的重根,因此由定理1可得方程的特解

$$\tilde{x}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{F''(-2)}e^{-2t}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{3}{2}t^2e^{-2t}\right]=\frac{3}{2}t^2e^{-2t}$$

2 $f(t)=Ae^{\alpha t}\sin\beta t$ 型

可以得到类似的结论,原方程的特解 $\tilde{x}$ 则可由以下定理得到.

定理 2　如果 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 不是特征方程的根,则 $\tilde{x}=\mathrm{lm}\left\{\dfrac{A}{F(\alpha+\mathrm{i}\beta)}\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)\right\}$;如果 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是特征方程的单根,则 $\tilde{x}=\mathrm{lm}\left\{\dfrac{A}{F'(\alpha+\mathrm{i}\beta)}\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)\right\}$.

注:由于考虑的是二阶常微分方程,因此不可能出现复重根的情况.

证明过程和定理 1 类似.

例 4　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2x=8\sin 2t$ 的特解.

解　因为 $\pm 2\mathrm{i}$ 不是特征方程 $\lambda^2+\lambda-2=0$ 的根,因此由结论可以直接得到方程的特解

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=\mathrm{lm}\left\{\frac{8}{F(2\mathrm{i})}(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)\right\}=\\&\mathrm{lm}\left\{-\frac{6+2\mathrm{i}}{5}(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)\right\}=\\&-\frac{2}{5}\cos 2t-\frac{6}{5}\sin 2t\end{aligned}$$

例 5　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+5x=\mathrm{e}^t\sin 2t$ 的特解.

解　因为 $1\pm 2\mathrm{i}$ 是特征方程 $\lambda^2-2\lambda+5=0$ 的单根,因此由结论可以直接得到方程的特解

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=\mathrm{lm}\left\{\frac{1}{F'(1+2\mathrm{i})}t\mathrm{e}^t(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)\right\}=\\&\mathrm{lm}\left\{\frac{1}{4\mathrm{i}}t\mathrm{e}^t(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)\right\}=\\&-\frac{1}{4}t\mathrm{e}^t\cos 2t\end{aligned}$$

例 6　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=\sin t-\cos 2t$ 的特解.

解　因为 i 是特征方程 $\lambda^2+1=0$ 的单根,对应于方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=\sin t$.

由定理 1 可以直接得到方程的特解

$$\tilde{x}_1=\mathrm{lm}\left\{\frac{1}{F'(\mathrm{i})}t(\cos t+\mathrm{i}\sin t)\right\}=\mathrm{lm}\left\{\frac{1}{2\mathrm{i}}t(\cos t+\mathrm{i}\sin t)\right\}=-\frac{1}{2}t\cos t$$

另一方面,由于 2i 不是特征方程 $\lambda^2+1=0$ 的根,对应于方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=-\cos 2t$.

由定理 1 可得到方程的特解

$$\tilde{x}_2=\mathrm{Re}\left[\frac{-1}{F(2\mathrm{i})}(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)\right]=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{3}(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)\right\}=\frac{1}{3}\cos 2t$$

再由叠加原理知,原方程的特解为 $\tilde{x}=\tilde{x}_1+\tilde{x}_2=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t+\dfrac{1}{2}t\sin t$.

3　结　论

利用待定系数法和比较系数法,推导出求解一类二阶常系数非齐次线性微分方程特解的一般公式,并用理论和实例证明了该算法的正确性,该算法的优点是计算简单,使学生更容易接受.

参考文献:

[1] 王高雄. 常微分方程[M]. 北京:高等教育出版社,2007

[2] 张伟年,杜正东,徐冰. 常微分方程[M]. 北京:高等教育出版社,2006

[3] 丁同仁. 常微分方程[M]. 北京:高等教育出版社,2010

[4] 焦宝聪. 常微分方程[M]. 北京:清华大学出版社,2008

[5] 同济大学数学系. 高等数学 [M]. 北京:高等教育出版社,2006

[6] 庄万. 常微分方程习题解[M]. 济南:山东科学技术出版社,2003

[7] 张建梅,孙志田,崔宁. 关于 $y''+py'+qy=Ae^{\alpha t}$ 的特解[J]. 高等数学研究,2005,8(3):14-15

Discussion on the Teaching of Special Solution to a Class of Second-order Ordinary Coefficient Differential Equations

ZHANG Shou-gui

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The special solution to a class of second-order ordinary coefficient differential equations based on undetermined coefficient method is discussed, general formulas for solving this kind of problems are obtained, and their proofs and numerical examples are given.

Key words: second-order ordinary differential equation; special solution; formula

责任编辑:李翠薇

(上接第7页)

参考文献:

[1] 严士健,王隽骧,刘秀芳. 概率论基础[M]. 北京. 科学出版社,1982

[2] ROCKAFFELLAR R T. Meassurable dependence of convex sets and functions on parameters[J]. Math Anal Appl,1969(28): 4-25

[3] 邱沛光. R^d 中紧集的性质[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(6). 566-567

Structures and Properties of Random Compact Set

QIU Pei-guang

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The definition of random compact set is given and its structures and related properties are studied.

Key words: random compact set; elementary random compact set; random convex compact set

责任编辑:李翠薇