文章编号:1672 - 058X(2012)11 - 0006 - 03

向量优化问题近似解的最优性条件

王 宏 刚

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:研究了由 Kutateladze 定义的向量优化问题的近似解,讨论了这类解的一些性质,用标量化方法得到了它们的充分和必要条件.

关键词:近似解;ε-有效解;定向距离函数;标量优化问题

中图分类号:O231.2　　**文献标志码**:A

在过去几十年,基于多种原因,研究者对优化问题的近似解有着广泛的兴趣,其中主要的一个原因是这类解频繁地出现在用迭代算法求解向量优化问题的过程中. 在向量优化问题中,运用不同的方法定义了多种近似解,其中最早也是最流行的一种是由 Kutateladze 在文献[1]中定义的,在此类近似解的基础上,研究者得出了向量变分原理、近似 KKT 条件、近似对偶定理等结论. 然而,这类近似解集通常过大,因此,研究者提出了各种新的近似解[2-7]. 此处讨论 Kutateladze 近似解的一些性质,利用定向距离函数,用标量化方法刻画它的最优性条件.

1　预备知识

设 X,Y 是赋范空间,集合 C 是 Y 的一个子集,分别定义 $\operatorname{int} C$, $\operatorname{cl}(C)$, $\operatorname{bd}(C)$ 是 C 的内部、闭包、边界. 集合 C 的生成锥通常被定义为 $\operatorname{cone}(C):=\bigcup_{\alpha>0}\alpha C$;如果 $\operatorname{cone}(C)=C$,则 C 是一个锥;如果 $\operatorname{int}(C)\neq\varnothing$,则集合 C 是实的;如果 $\varnothing\neq C\neq Y$,则 C 是真的;如果 $C\cap(-C)\subset\{0\}$,则 C 是点的. 研究向量优化问题

$$\operatorname{Min}\ \{f(x):x\in S\} \tag{1}$$

其中,$f:S\to Y$ 和 $S\subset X$, $S\neq\varnothing$,总假定 D 是一个点闭凸锥,Y 中的序关系是由 D 定义的.

定义 1　设 $x_0\in S$,如果$(f(x_0)-D\backslash\{0\})\cap f(S)=\varnothing$,则称 x_0 是问题(1)的关于 D 的有效解,这类有效解的集合记为 $E(f,S,D)$. 若 $\operatorname{int}(D)\neq\varnothing$ 且$(f(x_0)-\operatorname{int} D)\cap f(S)=\varnothing$,则称 x_0 是问题(1)的关于 D 的弱有效解,这类弱有效解的集合记为 $WE(f,S,D)$.

定义 2　设 $q\in D\backslash\{0\}$, $\varepsilon\in R_+$, $x_0\in S$,如果$(f(x_0)-\varepsilon q-D\backslash\{0\})\cap f(S)=\varnothing$,则称 x_0 是问题(1)的关于 D 的 ε - 有效解,这类 ε - 有效解的集合记为 $AE(f,D,q,\varepsilon)$. 若 $\operatorname{int}(D)\neq\varnothing$ 且$(f(x_0)-\varepsilon q-\operatorname{int} D)\cap f(S)=\varnothing$,则称 x_0 是问题(1)的关于 D 的 ε - 弱有效解,这类 ε - 弱有效解的集合记为 $WAE(f,D,q,\varepsilon)$.

定义 3　设 $Y=R$, $\varepsilon\in R_+$, $D=R_+$, $x_0\in S$,如果 $f(x_0)-\varepsilon\leqslant f(x)$, $\forall x\in S$,则称 x_0 是问题(1)的 ε 近似解,这类 ε - 近似解的集合记为 $\operatorname{Inf}(f,\varepsilon)$.

性质 1　设 $q\in D\backslash\{0\}$,则有

收稿日期:2012 - 03 - 27;**修回日期**:2012 - 06 - 05.

作者简介:王宏刚(1987-),男,甘肃天水人,从事向量优化问题理论与算法研究.

(Ⅰ) $AE(f,D,q,\varepsilon_1)\subset AE(f,D,q,\varepsilon_2)$, $\forall 0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$.

(Ⅱ) $\bigcap\limits_{\varepsilon>0}AE(f,D,q,\varepsilon)=WE(f,S,D)$.

(Ⅲ)设 $(x_n)\subset S$, $(\varepsilon_n)\subset R^+$, $y\in Y$, 使得 $x_n\in AE(f,D,q,\varepsilon_n)$, $\varepsilon_n\downarrow 0$ 且 $f(x_n)\to y$, 则有 $f^{-1}(y)\cap S\subset WE(f,S,D)$.

(Ⅳ)设 $(x_n)\subset S$, $(\varepsilon_n)\subset R^+$, 使得 $x_n\in AE(f,D,q,\varepsilon_n)$, $\varepsilon_n\downarrow 0$, $K=\bigcap\limits_{n}(f(x_n)-\varepsilon_n q-D)$. 如果 $q\in \operatorname{int} D$, 则有 $f^{-1}(K)\cap S\subset WE(f,S,D)$.

证明　类似于文献[8]中定理 3.4.

性质 2　设 $q_1,q_2\in\operatorname{int} D$, 则存在正常数 α,β, 使得对任意 $\varepsilon>0$, $WAE(f,D,q_2,\alpha)\subseteq WAE(f,D,q_1,\varepsilon)\subseteq WAE(f,D,q_2,\beta)$.

这个性质的证明要用到下面一些性质,故将其放到最后面.

2　最优性条件

定义 4[4]　设 $A\subseteq Y$, 函数 $\Delta_A:Y\to R\cup\{\pm\infty\}$ 定义如下: $\Delta_A(y):d_A(y)-d_{Y\backslash A}(y)$ 且 $\Delta_{\varnothing}(y)=+\infty$.

性质 3[4]　设 $A\neq\varnothing$ 且 $A\neq Y$, 则:

(Ⅰ) Δ_A 是实值的.

(Ⅱ)若 $y\in\operatorname{int}(A)$, 则 $\Delta_A(y)<0$; 若 $y\in\operatorname{bd}(A)$ 则 $\Delta_A(y)=0$; 若 $y\in Y\backslash A$, 则 $\Delta_A(y)>0$.

(Ⅲ)若 A 是闭集, 则 $A=\{y:\Delta_A(y)\leqslant 0\}$.

(Ⅳ)若 A 是凸集, 则 Δ_A 是凸的.

(Ⅴ)若 A 是锥, 则 Δ_A 是正齐次的.

(Ⅵ)若 A 是闭凸锥, $y_1,y_2\in Y$, 则 $y_1-y_2\in A\Rightarrow\Delta_A(y_1)\leqslant\Delta_A(y_2)$; $y_1-y_2\in\operatorname{int} A\Rightarrow\Delta_A(y_1)<\Delta_A(y_2)$.

推论 1　若 $\Delta_{-D}(f(x)-f(x_0)+\varepsilon q)>0\Leftrightarrow x_0\in AE(f,D,q,\varepsilon)$; 若 $\Delta_{-D}(f(x)-f(x_0)+\varepsilon q)\geqslant 0\Leftrightarrow x_0\in WAE(f,D,q,\varepsilon)$.

定理 1　设 $\delta\geqslant 0$, $q\in D\backslash\{0\}$, $x_0\in \operatorname{In} f(\Delta_{-D}\circ f,\delta)$, 则:

(Ⅰ)若 $\varepsilon>0$ 且 $\Delta_{-D}(f(x_0))+\Delta_{-D}(\varepsilon q-f(x_0))>\delta$, 则 $x_0\in AE(f,D,q,\varepsilon)$.

(Ⅱ)若 $\varepsilon>0$ 且 $\Delta_{-D}(f(x_0))+\Delta_{-D}(\varepsilon q-f(x_0))\geqslant\delta$, 则 $x_0\in WAE(f,D,q,\varepsilon)$.

证明　(Ⅰ)假设 $x_0\notin AE(f,D,q,\varepsilon)$, 则存在 $x\in S$, 使得 $f(x)\in f(x_0)-\varepsilon q-D\backslash\{0\}$, 即有 $\Delta_{-D}(f(x)-f(x_0)+\varepsilon q)\leqslant 0$.

由 Δ_A 的凸性和正其次性有:

$$\Delta_{-D}(f(x))\leqslant-\Delta_{-D}(\varepsilon q-f(x_0))\tag{2}$$

由 $x_0\in\operatorname{In} f(\Delta_D\circ f,\delta)$, 故有 $\Delta_{-D}(f(x_0))\leqslant\Delta_{-D}(f(x)+\delta$, $\forall x\in S$. 再结合式(2), 有:

$$\Delta_{-D}(f(x_0))+\Delta_{-D}(\varepsilon q-f(x_0))\leqslant\delta$$

这与 $\Delta_{-D}(f(x_0))+\Delta_{-D}(\varepsilon q-f(x_0))>\delta$ 矛盾.

(Ⅱ)的证明与(Ⅰ)的类似,故省略.

定理 2　设 $\delta\geqslant 0$, $q\in D\backslash\{0\}$, $x_0\in\operatorname{In} f(\Delta_D\circ f,\delta)$, 则:

(Ⅰ)若 $d(q,-D)>\dfrac{\delta}{\varepsilon}$, 则 $x_0\in AE(f,D,q,\varepsilon)$.

(Ⅱ)若 $d(q,-D)\geqslant\dfrac{\delta}{\varepsilon}$, 则 $x_0\in WAE(f,D,q,\varepsilon)$.

证明　(Ⅰ)若假设 $x_0\notin AE(f,D,q,\varepsilon)$, 则存在 $x\in S$, 使得 $f(x)\in f(x_0)-\varepsilon q-D\backslash\{0\}$, 即有:

$$f(x)+\varepsilon q-f(x_0)\in -D$$

D 是闭凸锥,故 $\Delta_{-D}(f(x)+\varepsilon q)\leqslant\Delta_{-D}(f(x_0))$,即 $y=-d-\beta q_2+\varepsilon q_1$.

又由于 $\Delta_{-D}(q)=d(q,-D)$,所以 $\Delta_{-D}(f(x))+\varepsilon\Delta_{-D}(q)=\Delta_{-D}(f(x))+\varepsilon d(q,-D)>\Delta_{-D}(f(x))+\delta$,联式(3),有 $\Delta_{-D}(f(x))+\delta<\Delta_{-D}(f(x_0))$.

另一方面,$x_0\in \operatorname{In} f(\Delta_D{}^\circ f,\delta)$,则 $\Delta_{-D}(f(x_0))\leqslant\Delta_{-D}(f(x)+\delta,\ \forall x\in S$. 这与式(3)矛盾,证毕.

(Ⅱ)的证明与(Ⅰ)的类似,故省略.

性质 2 的证明 欲证 $WAE(f,D,q_2,\alpha)\subseteq WAE(f,D,q_1,\varepsilon)\subseteq WAE(f,D,q_2,\beta)$,只需证明存在正常数 α,β,使得对任意 $\varepsilon>0$,使得 $-\beta q_2-\operatorname{int} D\subseteq-\varepsilon q_1-\operatorname{int} D\subseteq-\alpha q_2-\operatorname{int} D$,只需证明存在正常数 β,使得 $-\beta q_2-\operatorname{int} D\subseteq-\varepsilon q_1-\operatorname{int} D$. 设存在 $d\in\operatorname{int} D$,使得 $y=-d-\beta q_2+\varepsilon q_1$,只需证明 $y\in-\operatorname{int} D$,即 $\Delta_{-D}(y)<0$.

由 Δ_{-D}的凸性和正其次性有:

$$\begin{aligned}\Delta_{-D}(y)&\leqslant\Delta_{-D}(-d)+\beta\Delta_{-D}(-q_2)+\varepsilon\Delta_{-D}(q_1)<\\&\beta\Delta_{-D}(-q_2)+\varepsilon\Delta_{-D}(q_1)<0\end{aligned}$$

要得到上面的结果,只需要 $\beta>\dfrac{\varepsilon\Delta_{-D}(q_1)}{\Delta_{-D}(-q_2)}>0$,证毕.

参考文献:

[1] KUTATELADZE S S. Convex ε-programming[J]. Soviet Math Dokl,1979(20):391-393

[2] GAO Y,HOU S H,YANG X M. Existence and Optimality Conditions for Approximate Solutions to Vector Optimization Problems [J]. J Optim Theory Appl,2011(11):6-10

[3] GERTH C,WEIDNER P. Nonconvex Separation Theorems and Some Applications in Vector Optimization[J]. J Optim Theory Appl,1990,67:297-320

[4] ZAFFARONI A. Drgrees of efficiency and degrees of minimality[J]. SIAM Journal Control and Optimization,2003,42:1071-1086

[5] GUTIERREZ C,JIMENEZ B,NOVO V. A property of efficient and ε-efficient solutions in vector optimization[J]. Appl Math Lett,2005:409-414

[6] MIETTINEN K,MAKELA M M. On cone characterization of weak,proper and pareto optimality in multiobjective optimization[J]. Math Meth Oper Res,2001,53:233-245

[7] CHICCO M,MIGNANEGO F,PUSILLO L,et al. Vector optimization problems via improvement set[J]. J Optim Theory Appl,2011(150):516-529

[8] GUTIERREZ C,JIMENEZ B,NOVO V. A unifed approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. SIAMJ OPTM,2006,17:688-710.

Optimality Condition for Approximate Solutions in Vector Optimization Problems

WANG Hong-gang

(School of Mathematics,Chongqing Normal University,Chongqing 401331,China)

Abstract: The approximate solutions in vector optimization problems defined by Kutateladze is studied, some properties of this class of solutions are discussed, and their sufficient and necessary condition is obtained by scalar method.

Key words: approximate solution; ε-effective solution; oriented distance function; scalar optimization problem

责任编辑:李翠薇