文章编号:1672-058X(2012)10-0056-05

分数布朗运动环境中交换期权的定价模型*

沈明轩[1],何成洁[2]
(1. 安徽工程大学 数理学院,安徽 芜湖 241000;2. 安徽奇瑞汽车销售有限公司,安徽 芜湖 241009)

摘　要:考虑分数布朗运动环境中交换期权的定价问题;假设两种股票的价格过程都服从由几何分数布朗运动所驱动的随机微分方程,利用保险精算定价方法得到了交换期权的定价公式。

关键词: 分数布朗;交换期权;保险精算;期权定价

中图分类号:O141.4　　　**文献标志码:**A

传统的期权定价模型都是假设股票价格过程服从几何布朗运动,然而实证研究表明股票价格过程具有长期依赖性和自相关性,而分数布朗运动恰好具备此性质。因此假设股票价格过程服从分数布朗运动更与实际相符。Hurst 参数为 $H(0<H<1)$ 的分数布朗运动为一连续的 Gaussian 过程 $\{B_H(t), t\in R\}$,满足 $B_H(0)=0$,$E[B_H(t)]=0$,并且 $E[B_H(t)B_H(s)]=\frac{1}{2}\{|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}\}$。当 $H=\frac{1}{2}$时,$B_H(t)$即为标准布朗运动 $B(t)$。分数布朗运动具有自相似性,即对 $\alpha>0$,过程当 $B_H(\alpha t)$与过程 $\alpha^H B_H(t)$有相同的有限维分布,并且当 $H>\frac{1}{2}$时,分数布朗运动具有长期依赖性。分数布朗运动的这些性质使得它成为研究金融数学的合适工具。Cheridito 研究表明,分数轨道积分意义下的 $B-S$ 市场存在套利机会,但 Elliott 建立了分数伊藤积分的 $B-S$ 模型,且相应的分数 $B-S$ 市场具有完备性。Hu[1,2]等在 $H>\frac{1}{2}$时定义了分数布朗运动的随机积分,Necula[3]利用这种积分求解了 $B-S$ 公式,文献[4]在分数布朗假设下得到了几何平均亚式期权的定价公式,何传江等[5]在这种积分下求解了分数跳-扩散模型下的交换期权的定价问题,现采用这种积分,并恒假设$\frac{1}{2}<H<1$。

交换期权是一种期权持有人在到期日有权但不必须以一种资产交换另一种资产的合约。Margrabe[5]给出了在扩散模型中的交换期权的闭式解,文献[5,7]采用 Bladt 和 Rydberg[8]提出的保险精算方法,在股票价格过程遵循由几何分数布朗运动所驱动的随机微分方程的假设下,给出了相应的交换期权定价公式。但在这两篇文献中,均未考虑分数布朗运动的相关性,在假设分数布朗运动具有一定的相关系数的条件下,利用保险精算方法得到了广义交换期权的定价公式。

收稿日期:2012-03-05;**修回日期:**2012-03-25.

* **基金项目:**教育部人文社会科学研究规划基金项目(12YJA790041); 安徽省自然科学基金项目(1208085MG116);安徽工程大学青年基金(2008YQ048).

作者简介:沈明轩(1982-),男,安徽颍上人,硕士研究生,讲师,从事金融数学研究.

1　模型及假设

假设市场上仅有两种风险资产 $S_1(t),S_2(t)$。设 (Ω,F,F_t,P) 是一具有 σ - 流的概率空间,其中 F_t 是由分数布朗运动 $B_H(t)$ 产生的自然 σ - 流。$S_1(t),S_2(t)$ 遵循以下过程:

$$dS_1(t)=\mu_1(t)S_1(t)dt+\sigma_1S_1(t)dB_H^1(t),S_1(0)=S_1 \tag{1}$$

$$dS_2(t)=\mu_2(t)S_2(t)dt+\sigma_2S_2(t)dB_H^2(t),S_2(0)=S_2 \tag{2}$$

其中 $u_1(t)$、$u_2(t)$ 为可积函数,σ_1、$\sigma_2>0$ 分别为 $S_1(t)$、$S_2(t)$ 的波动率,$B_H^1(t)$,$B_H^2(t)$ 为相关系数为 $\rho(|\rho|\leqslant 1)$ 的分数布朗运动。$B_H(t)$ 分布函数为:

$$P(B_H(t)\leqslant a)=\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi t^H}}e^{-\frac{x2}{2t2H}}dx\ 。$$

引理 1[3]　随机微分方程(1)、(2)的解为:

$$S_i(t)=S_i\exp\{\int_0^t\mu_i(s)ds-\frac{1}{2}\sigma_i^2t^{2H}+\sigma_iB_H^i(t)\}(i=1,2) \tag{3}$$

有关期权保险精算概念如下。

定义 1　风险资产价格过程 $X(t)$ 在 $[0,t]$ 产生的预期收益率 $\int_0^t\beta(t)dt$ 定义为:$e^{\int_0^T\beta(t)dt}=\frac{EX(T)}{X(0)}$,其中 $\beta(t)$ 为风险资产 $S(t)$ 在 t 时刻的连续复利收益。

假设市场上无风险资产 $P(t)$ 价格过程满足:

$$dP(t)=P(t)r(t)dt\quad P(0)=1$$

其中 $r(t)$ 为 t 时无风险收益率。

定义 2　欧式看涨期权现在的价值定义为:资产到期之日价格分布按预期收益率折现的现值与执行价格按无风险利率折现的现值的差,在资产实际分布的概率测度下的数学期望值,这一定价就称为期权的保险精算定价。

2　期权定价公式

这里考虑一类到期日期权损益函数为:$G(S_1(T),S_2(T))=\max[aS_1(T)-bS_2(T),0]$ 的广义交换期权定价问题,其中 $a,b>0$。由定义 2 可知,广义交换期权被执行的充要条件是:$a\exp\{-\int_0^T\beta_1(t)dt\}S_1(T)>b\exp\{-\int_0^T\beta_2(t)dt\}S_2(T)$。

定理 1　股票价格 $\{S_i(t):t\geqslant 0,i=1,2\}$ 分别满足方程(1)、(2),且到期日损益函数为 $\max[aS_1(T)-bS_2(T),0]$ 的看涨交换期权的价格为:

$$C(S_1,S_2)=aS_1N(d_1)-bS_2N(d_2)$$

其中 $d_1=\frac{\ln\frac{aS_1}{bS_2}+\frac{1}{2}\sigma^2T^{2H}}{\sigma T^H}$,$d_2=d_1-\frac{1}{2}\sigma T^H$,$\sigma^2=\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2$。

证明　由式(3)可知:

$$S(T)=S(0)\exp\left\{\int_0^T\mu(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\sigma^2T^{2H}+\sigma B_H(T)\right\}$$

可得:

$$ES(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}S(0)\exp\left\{\int_0^T\mu(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\sigma^2T^{2H}+\sigma x\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}T^H}\exp\left\{-\frac{x^2}{2T^{2H}}\right\}\mathrm{d}x=$$

$$S(0)\exp\{\int_0^T\mu(t)\mathrm{d}t\}$$

所以有 $ES_i(T)=S_i\exp\{\int_0^T\mu_i(t)\mathrm{d}t\},(i=1,2)$。

则:

$$\exp\{\int_0^T\beta_i(t)\mathrm{d}t\}=\frac{ES_i(T)}{S_i}=\exp\{\int_0^T\mu_i(t)\mathrm{d}t\}$$

所以:

$$a\exp\{-\int_0^T\beta_1(t)\mathrm{d}t\}S_1(T)>b\exp\{-\int_0^T\beta_2(t)\mathrm{d}t\}S_2(T)$$

即为:

$$aS_1\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1B_H^1(T)\right\}>bS_2\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_2^2T^{2H}+\sigma_2B_H^2(T)\right\}$$

等价于:

$$\ln aS_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1B_H^1(T)>\ln bS_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2T^{2H}+\sigma_2B_H^2(T)\tag{4}$$

记 $x=\frac{B_H^1(T)}{T^H},y=\frac{B_H^2(T)}{T^H}$,则 $x\sim N(0,1),y\sim N(0,1)$。

x、y 的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right\}=f(x)f(y\mid x)$$

其中 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},f(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}$。

则式(4)即为:$y<\dfrac{\ln\frac{aS_1}{bS_2}-\frac{1}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2)T^{2H}+\sigma_1T^Hx}{\sigma_2T^H}$。

记 $d=\dfrac{\ln\frac{aS_1}{bS_2}-\frac{1}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2)T^{2H}+\sigma_1T^Hx}{\sigma_2T^H}$,则:

$$d'=\frac{\ln\frac{aS_1}{bS_2}-\frac{1}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2)T^{2H}+(\sigma_1-\sigma_2\rho)T^Hx}{\sigma_2T^H\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$d''=\frac{\ln\frac{aS_1}{bS_2}-\frac{1}{2}(\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)T^{2H}+(\sigma_1-\sigma_2\rho)T^Hx}{\sigma_2T^H\sqrt{1-\rho^2}}$$

看涨交换期权的价格:

$$C(S_1,S_2)=E[(a\exp\{-\int_0^T\beta_1(t)\mathrm{d}t\}S_1(T)-b\exp\{-\int_0^T\beta_2(t)\mathrm{d}t\}S_2(T))I_{\{a\exp\{-\int_0^T\beta_1(t)\mathrm{d}t\}S_1(T)>b\exp\{-\int_0^T\beta_2(t)\mathrm{d}t\}S_2(T)\}}]=$$

$$E\left[aS_1\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1B_H^1(T)\right\}I_{\{aS_1\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1B_H^1(T)\}>bS_2\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_2^2T^{2H}+\sigma_2B_H^2(T)\}\}}\right]-$$

$$E\left[bS_2\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_2^2T^{2H}+\sigma_2B_H^2(T)\right\}I_{\{aS_1\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1B_H^1(T)\}>bS_2\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_2^2T^{2H}+\sigma_2B_H^2(T)\}\}}\right]=\prod{}_1-\prod{}_2$$

$$\prod{}_1=aS_1E\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1B_H^1(T)\right\}I_{\{aS_1\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1B_H^1(T)\}>bS_2\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_2^2T^{2H}+\sigma_2B_H^2(T)\}\}}\right]=$$

$$aS_1\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{d}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1T^Hx\right\}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=$$

$$aS_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1T^Hx-\frac{x^2}{2}\right\}\int_{-\infty}^{d}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

令 $u=\dfrac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}$，则上式等于：

$$aS_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\int_{-\infty}^{\frac{(d-\rho x)}{\sqrt{1-\rho^2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1T^Hx\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}x=$$

$$aS_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2T^{2H}+\sigma_1T^Hx-\frac{x^2}{2}\right\}N(d')\mathrm{d}x=$$

$$aS_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\sigma_1T^H)^2}{2}\right\}N(d')\mathrm{d}x$$

令 $z=x-\sigma_1T^H$，则上式等于：

$$aS_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}N(d'')\mathrm{d}z=aS_1N(d_1)$$

最后一个等式由文献[8] $\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)N(a+bz)dz=N\left(\dfrac{a}{\sqrt{1+b^2}}\right)$ 可得。其中 $f(z)$ 为标准正态密度函数。

同理可得 $\prod{}_2=bS_2N(d_2)$。

定理 2　股票价格 $\{S_i(t):t\geqslant 0,i=1,2\}$ 分别满足方程(1)、(2)，且到期日损益函数为 $\max[bS_2(T)-aS_1(T),0]$ 的看跌交换期权的价格为：

$$P(S_1,S_2)=bS_2N(-d_2)-aS_1N(-d_1)$$

其中 d_1,d_2 如前定义。

注 1　当两种股票分别有红利支付，且红利率 g_1,g_2 为常数，其他条件不变时，分数布朗运动环境下广义看涨、看跌交换期权价格分别为：

$$C'(S_1,S_2)=ae^{-g_1T}S_1N(d_3)-be^{-g_2T}S_2N(d_4)$$

$$P'(S_1,S_2)=be^{-g_2T}S_2N(-d_4)-aS_1e^{-g_1T}N(-d_3)$$

其中 $d_3=\dfrac{\ln\dfrac{aS_1}{bS_2}+\dfrac{1}{2}\sigma^2T^{2H}+(g_2-g_1)T}{\sigma T^H}$，$d_4=d_3-\dfrac{1}{2}\sigma T^H$。

注 2　当 $a=1,b=1$ 时，定理 1、定理 2 分别为分数布朗运动环境中一般欧式看涨、看跌交换期权定价公式。

注 3　当 $a=1,b=1,H=\dfrac{1}{2}$ 时，定理 1、定理 2 分别为标准布朗运动环境中一般欧式看涨、看跌交换期权定价公式。

3 结 论

通过采用保险精算定价方法得到了分数布朗运动环境中欧式交换期权的定价公式,并且考虑了分数布朗运动之间的相关性,使得定价模型与事实更加接近。

参考文献:

[1] DUCAN T E, HU Y, PASIK D B. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion[J]. SIAM J Control Optim, 2000, 38: 582-612

[2] HU Y, KSENDAl B. Fractional White Noise and Application to Finance[J]. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2003(6): 1-32

[3] CIPRIAN N. Option Pricing in a Fractional Brownian Motion Environment[J]. Mathematical Reports, 2004, 6(3): 259-273

[4] 分数型几何平均亚式期权的保险精算定价[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版, 2010, 27(5): 435-439

[5] 何传江,方知. 分数跳-扩散模型下的互换期权定价[J]. 经济数学, 2009, 26(2): 23-29

[6] MARGRABE M. The Value of an Option to Exchange One Asset for Another [J]. Journal of Finance, 1978, 24(3): 177-186

[7] 邓英东,范允征,何启志. 几何分数布朗运动交换期权的保险精算定价[J]. 统计与决策, 2007, 23: 16-18

[8] BLADT M, RYDBERG T H. An Actuarial Approach to Option Pricing Under the Physical Measure and Without Market Assumptions [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, 22(1): 65-73

Exchange Option Pricing Model in Fractional Brownian Motion Environment

SHEN Ming-xuan[1], HE Cheng-jie[2]

(1. School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Anhui Wuhu 241000, China;
2. Anhui Chery Automobile Sales Co., Ltd., Anhui Wuhu, 241009, China)

Abstract: The issue of exchange options pricing in fractional Brownian motion environment is considered. Under the assumption that the two stock pricing processes obey the stochastic differential equation driven by geometric fractional Brownian motion, we obtain the pricing formula of exchange options by insurance actuary pricing method.

Key words: fractional Brownian motion; exchange option; insurance actuary; option pricing

责任编辑:田 静