文章编号:1672－058X(2012)09－0034－04

Merton 随机利率模型下欧式期权的定价*

孙 颖

(西安工业大学 理学院,陕西 西安 710032)

摘 要: 在 Merton 利率模型下,用到了 7 个假设,这些假设都是为了使期权处于一个风险中性世界,从而可以建立一个无风险证券组合,并设定其收益率等于无风险利率;以连续时间情形为例,利用风险中性鞅测度,对 B—S 公式进行了改进,从而得出欧式股票期权的定价公式。

关键词: 布朗运动,股票期权,无风险中性定价理论

中图分类号: O212 **文献标志码:** A

股票期权于 1973 年首次在有组织的交易所内进行交易,从此,期权市场发展十分迅猛。期权有两种类型,看涨期权(call option)和看跌期权(put option),它们的持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格购买标底资产,但不一定必须行使该权利。由于期权的这种特性,对于它的定价问题就显得尤为关键。现代期权定价理论的最新革命始于 20 世纪 70 年代,美国芝加哥大学教授 Fischer Black 与 Myron Scholes 发表了“The Pricing of option and coporate liabilities”一文,推导出基于不付红利股票的衍生证券的价格必须满足的微分方程。在 Black-Scholes 模型的基础上(以下简称 B-S 模型),对其进行了改进,使之假设条件变的更为符合实际应用。

1 B-S 模型的推导

推导 Black-Scholes 微分方程时用到了 7 个假设[1],这些假设都是为了使期权处于一个风险中性世界,从而可以建立一个无风险证券组合,并设定其收益率等于无风险利率。假设股票价格 S 服从几何布朗运动(geometric Brownian motion),即有:

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}z \tag{1}$$

此方程的离散形式为:

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\Delta z \tag{2}$$

这里,μ 和 σ 都是常数,μ 是投资者在短时间后获得的预期收益率,以年计量,用比率的形式表示。σ 是股票价格的波动率,$\mathrm{d}z$ 是一个维纳过程,其均值为 0,标准差为 $\sqrt{\mathrm{d}t}$。

假设 f 是依赖于 S 的衍生证券的价格,它一定是 S 和 t 的某一函数。由 ITO 定理得到:

收稿日期:2012－05－20;修回日期:2012－06－06.

* 基金项目:国家自然科学基金资助项目(40271038).

作者简介:孙颖(1981-),女,陕西渭南人,助教,硕士研究生,从事概率与数理统计研究.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \tag{3}$$

其离散形式为:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \tag{4}$$

选择恰当的证券组合消去维纳过程,应该是:

-1 :衍生证券

$+\frac{\partial f}{\partial S}$:股票

此证券组合的持有者卖出一份衍生证券,买入数量为 $+\frac{\partial f}{\partial S}$的股票。定义证券组合的价值为 Π。根据定义:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \tag{5}$$

Δt 时间后证券组合的价值变化 $\Delta\Pi$ 为:

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \tag{6}$$

将方程(2)和(4)代入,得到:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \tag{7}$$

因为这个方程不含有 Δz,经过 Δt 后证券组合 Π 必定没有风险。因为条件假设不存在无风险套利机会,且无风险利率为常数对所有到期日都相同。由此该证券组合的瞬时收益率一定等于其它短期无风险证券收益率。所以结果应该是:

$$\Delta\Pi = r \cdot \Pi \cdot \Delta t$$

其中 r 为无风险利率。在由方程(5)和(7)可以得到:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r \cdot \left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

化简为:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{8}$$

方程是 Black-Scholes 微分方程。对应于所有的可用标底变量定义的不同衍生证券,方程有许多解。解方程时得到的特定的衍生证券取决于使用的边界条件(boundary conditions)。这些边界条件确定了在 S 和 t 的可能取值的边界条件上衍生证券的价值。欧式期权只能在到期日执行,对于欧式看涨期权的情况,关键的边界条件为:$f = \max(S - X, 0)$　当 $t = T$ 时,对于欧式看跌期权,边界条件为:$f = \max(X - S, 0)$　当 $t = T$ 时,S 为 T 时刻股票价格,X 为敲定价格,即执行价格。

Black 和 Scholes 成功求解了他们的微分方程,得出欧式看涨期权的价格为:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

其中:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

2 Merton 模型

假设市场是完全的市场,它包含有一个零息票债券和一种风险资产。以上都假设利率是常数,但是在实际背景下,即使是短期利率也是不断变化的。因此,假定利率在期权有效期内不变,就不足以满足实际背景的要求。Merton 曾经提出过一个模型,这个模型考虑了利率是随机变量时的期权定价。定义 $B(t)$ 为与期权同时到期且到期时支付给持有人 \$ 1 的贴现债券的价值。Merton 假设 B 遵循以下过程:

$$\frac{\mathrm{d}B}{B} = \mu_B \mathrm{d}t + \sigma_B \mathrm{d}z_B$$ [2]

变量是 μ_B 债券价格的增长率,它是随机变量;σ_B 是 B 的波动率,它假定为时间的已知函数;$\mathrm{d}z_B$ 是维纳过程。

3 Merton 模型下 B-S 公式的改进

考虑一个欧式看涨期权,其到期时刻为 T,敲定价格为 X,设它在时刻 t 的价格是 $C(t, r_t S_t, K)$。因为此期权在 T 时刻的收益为 $(S_T - K)^+$,由无套利定价理论,其在 t 时刻的价格满足:

$$C(t, r_t, S_t, K) = E_P[(S_T - K)^+ e^{-\int_t^t r_s d_s} | F_t]$$ [3]

由条件期望的性质有:

$$C(t, r_t, S_t, K) = SN(d_1) - BXN(d_2)$$

这里:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) - \ln B + (\hat{\sigma}^2/2)(T - t)}{\hat{\sigma} \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma} \sqrt{T - t}$$

$$\hat{\sigma}^2 (T - t) = \int_t^T (\sigma^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma\sigma_B)\mathrm{d}t$$

参数 σ 是股票的波动率且 ρ 为股票价格与债券价格之间的瞬间相关系数。

欧式看跌期权的价格可以平价公式直接求得。

$$P(t, r_t, S_t, K) = BXN(-d_2) - SN(-d_1)$$ [4]

其中 R 为 T 时刻到期的无风险债券的利率。如果:

(1) 瞬时利率 r 有利率 R 取代,此利率为与期权同时到期的无风险债券的利率。

(2) 股票价格波动率 σ 被 $\hat{\sigma}$ 所取代。则 Merton 模型与 Black-Scholes 模型是一样的。

Merton 的模型支持使用 R,而不是 Black-Scholes 模型中的 r。在大多数可交易的期权中 $\hat{\sigma}$ 接近于 σ。因此波动率的调整对于期权价格几乎没有影响。Merton 的模型存在一个理论缺陷,它要求贴现债券的波动率为时间的已知函数。在许多有关利率的模型中,债券价格的波动率是债券价格本身和时间的二元函数。

4　结　论

在随机利率情形下,研究股票期权的定价很有实际应用。还可以对B-S公式的其它参数进行讨论,从而可以解决任何类型期权的定价问题。

参考文献:

[1] 约翰.赫尔.期权、期货和衍生证券[M].上海:华夏出版社,1997

[2] 雍炯敏,刘道百.数学金融学[M].上海:上海人民出版社,2003

[3] 姚落根,王雄,杨向群.Vasicek利率模型下几何亚式期权的定价[J].湘潭大学学报:自然科学版,2004(3):18-21

[4] 王莉君,张曙光.随机利率下重置期权的定价问题[J].高校应用数学学报,2002,17:39-42

[5] KARATZAS I. SHREVE S E. Stochastic Calculus [M]. New York: Springer-Verlag, 1991

[6] 张向科,刘浪.模糊层次分析法在轻轨站点综合评价中的应用[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2012(4):27-31

Pricing of European Option under Merton Stochastic Interest Rate

SUN Ying

(School of Science, Xian Technological University, Shaanxi Xian 710032, China)

Abstract: Under Merton interest rate model, seven suppositions are used, these suppositions aim to let option risk neutrality so that securities portfolio without risk can be set up and let its earnings rate equal to interest rate without risk. Taking consecutive time situation as an example, this paper uses neutral Martingale measurement to improve B-S formula so that the pricing formula for European stock option is obtained.

Key words: Brownian motion; stock option; risk-free neutral pricing theory

责任编辑:田　静