

文章编号:1672-058X(2012)08-0026-05

# 关于笛卡尔乘积图边容错直径的研究

刘启云, 王 建, 谢 堃

(安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601)

**摘 要:**笛卡尔乘积是从若干特定的小网络构造大网络的有效方法,边容错直径是衡量一个网络可靠性和效用性的重要标准,研究了笛卡尔乘积网络的边容错直径,并且得到了一个相关的结果. 对任何  $t_1, t_2 \geq 1$ , 若  $G_1, G_2$  分别是  $t_1$  边连通的和  $t_2$  边连通的, 则它们的笛卡尔乘积图的边容错直径  $D'_{t_1+t_2}(G_1 \times G_2) \leq D'_{t_1}(G_1) + D'_{t_2}(G_2) + 1$ . 并且, 该不等式中的上界是最好的.

**关键词:**边连通; 笛卡尔乘积; 边容错直径

**中图分类号:** O157.6

**文献标志码:** A

## 0 引 言

大规模集成(VLSI)电路技术的出现,使人们能建造出非常庞大而复杂的互连网络. 出于多方面考虑,下一代超级计算机系统将通过增加处理器的数目,而不是单靠利用更快的处理器来实现高速快捷的目的. 建造超级计算机系统最困难的技术问题将是连接这些处理器的互连网络的设计,选择一个合适和理想的互连网络拓扑结构将变成一个迫切需要解决的问题. 实践证明,图论是设计和分析互连网络的最基本且强有力的数学工具,因为互连网络的拓扑结构就是图. 将网络中的处理器看成图中的顶点,各处理器之间的网络连线对应于图中连接相应顶点的边,此时,就可以通过分析图的结构来研究该网络. 这样,网络的建构方法和可靠性,就可以看作是图的构造方法和可靠性. 笛卡尔乘积是构建大型网络的重要方法,容错性是衡量网络效用性的重要标准,它们均可对应成图的相关特点和性质.

## 1 预备知识

介绍徐俊明<sup>[1]</sup>给出的图的基本定义和符号,这里只考虑简单无向图,即那些没有环和重边的无向图.

**定义 1** 令图  $G = (V(G), E(G))$ , 其中  $V(G), E(G)$  分别是图  $G$  的顶点集和边集. 对任何  $u, v \in V(G)$ , 若  $u, v$  之间有边,就说  $u$  和  $v$  是邻接的,并分别用  $N_G(u), d_G(u)$  表示顶点  $u$  的邻点集合和邻点的数目,通常  $d_G(u)$  称为  $u$  的度,图  $G$  顶点的最小度和最大度记作  $\delta(G)$  和  $\Delta(G)$ , 分别定义为

$$\delta(G) = \min\{d_G(u) : u \in V(G)\}, \Delta(G) = \max\{d_G(u) : u \in V(G)\}$$

**定义 2** 设  $u_0, u_1, \dots, u_k$  是  $G$  中的  $k+1$  个不同的顶点,若对所有的  $0 \leq i \leq k-1$ , 均有  $u_i$  与  $u_{i+1}$  邻接,记

$P = u_0 u_1 \cdots u_k$ , 则  $P$  表示一条从  $u_0$  到  $u_k$  的路, 其长度为  $k$ ; 距离  $d_G(u, v)$  表示  $G$  中  $u$  到  $v$  最短路的长度, 如果没有这样的路, 就记  $d_G(u, v) = \infty$ . 当  $u, v$  取遍所有的顶点, 把  $d_G(u, v)$  的最大值称为图  $G$  的直径, 记作  $d(G)$ .

**定义3**  $G$  的点连通度  $\kappa(G)$ , 指的是  $G$  的最小点割的大小, 也就是说, 存在  $V(G)$  的一个大小为  $\kappa(G)$  的子集, 使得  $G$  在删除这些点后变得不连通; 相似地, 边连通度  $\lambda(G)$  指的是  $G$  的最小边割的大小.

**定义4** 若  $\kappa(G) \geq k$ , 则说图  $G$  是  $k$  点连通的; 若  $\lambda(G) \geq t$ , 则说图  $G$  是  $t$  边连通的.

网络的笛卡尔乘积设计在其拓扑结构上就是图的笛卡尔乘积, 接着描述一下徐俊明<sup>[3]</sup>给出的笛卡尔乘积图构造方法及部分性质.

**定义5** 设  $G_1 = (V_1, E_1)$  和  $G_2 = (V_2, E_2)$  是两个无向图,  $G_1$  和  $G_2$  的笛卡尔乘积是无向图, 记为  $G_1 \times G_2$ , 其中  $V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2$ , 两个不同的顶点  $x_1 x_2$  和  $y_1 y_2$  (其中  $x_1, y_1 \in V(G_1)$ ,  $x_2, y_2 \in V(G_2)$ ) 相邻当且仅当或者  $x_1 = y_1$  且  $x_2 y_2 \in E(G_2)$ , 或者  $x_2 = y_2$  且  $x_1 y_1 \in E(G_1)$ ,  $G_1$  和  $G_2$  称为  $G_1 \times G_2$  的因子; 若  $x_1 x_2$  和  $y_1 y_2$  邻接, 就用  $(x_1 x_2, y_1 y_2)$  或者  $(y_1 y_2, x_1 x_2)$  表示这条边.

网络的容错性对应于它的图结构的点容错直径和边容错直径, 徐俊明<sup>[3]</sup>也给出了相关的定义和结论.

**定义6** 对  $w$  点连通图  $G$ , 它的  $(w-1)$  点容错直径定义为

$$D_w(G) = \max\{d(G-F) : F \subseteq V(G), |F| < w\}$$

**定义7** 设  $G$  是  $t$  边连通图,  $x, y \in V(G)$ ,  $F \subseteq E(G)$ ,  $|F| < t$ ;  $G$  中从  $x$  到  $y$  的  $(t-1)$  边容错距离, 记为  $D'_t(G; x, y)$ , 定义为

$$D'_t(G; x, y) = \max\{d(G-F; x, y) : F \subseteq E(G), |F| < t\}$$

显然,

$$D'_t(G; x, y) = \max\{d(G-F; x, y) : F \subseteq E(G), |F| = t-1\}$$

$G$  的  $(t-1)$  边容错直径, 记为  $D'_t(G)$ , 定义为

$$D'_t(G) = \max\{d(G-F) : F \subseteq E(G), |F| < t\}$$

显然,

$$D'_t(G) = \max\{d(G-F) : F \subseteq E(G), |F| = t-1\}$$

例如, 对于无向圈  $C_n (n \geq 3)$ , 有  $D'_2(C_n) = n-1$ .

显然, 对任何  $t$  边连通图  $G$ , 有

$$d(G) = D'_1(G) \leq D'_2(G) \leq \cdots \leq D'_{t-1}(G) \leq D'_t(G)$$

对边容错直径的研究已经有了一些结果, 比如, Plesnik<sup>[4]</sup>就证明了: 对任何无向图  $G$ , 有  $D'_2(G) \leq 2d(G)$ , 而且这个上界是最好的, 即存在一个 2 边连通无向图  $G$ , 使得  $D'_2(G) = 2d(G)$ . 但是, 总的来说确定一般图的边容错直径是相当困难的, 还有许多问题期待着被解决.

对于  $\kappa(G)$  和  $\lambda(G)$ , 有个重要的结论, 是由 Whitney<sup>[2]</sup>得到的, 在图论的研究中经常被使用到.

**引理1** 对于任意图  $G$ ,  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ .

**引理2** 由笛卡尔乘积图的定义, 容易得到它的一些基本性质.

(a)  $v(G_1 \times G_2) = v(G_1)v(G_2)$ .

(b) 对任何  $xy \in V(G_1 \times G_2)$ , 其中  $x \in V(G_1)$  且  $y \in V(G_2)$ ,  $d_{G_1 \times G_2}(xy) = d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y)$ ; 特别地, 如果  $G_1$  和  $G_2$  分别是  $r_1$  正则和  $r_2$  正则的, 则  $G_1 \times G_2$  是  $r_1 + r_2$  正则的.

(c) 对任何  $y \in V(G_2)$ ,  $G_1 \cong G_1 \times \{y\} \subseteq G_1 \times G_2$ ; 对任何  $x \in V(G_1)$ ,  $G_2 \cong \{x\} \times G_2 \subseteq G_1 \times G_2$ .

(d) 由  $G_1 \times G_2$  的定义, 如果  $P = (x_1, v_1, v_2, \cdots, v_m, y_1)$  是  $G_1$  中一条  $(x_1, y_1)$  路, 则对任何  $b \in V(G_2)$ ,

$(x_1b, v_1b, v_2b, \dots, v_mb, y_1b)$  记为  $Pb$ , 是  $G_1 \times G_2$  中从顶点  $x_1b$  到顶点  $y_1b$  的路; 同样地, 如果  $W = (x_2, u_1, u_2, \dots, u_l, y_2)$  是  $G_2$  中一条  $(x_2, y_2)$  路, 则对任何  $a \in V(G_1)$ ,  $(ax_2, au_1, au_2, \dots, au_l, ay_2)$  记为  $aW$ , 是  $G_1 \times G_2$  中从顶点  $ax_2$  到顶点  $ay_2$  的路; 记  $G_1b = G_1 \times \{b\}$ ,  $aG_2 = \{a\} \times G_2$ , 显然有  $Pb \subseteq G_1b \cong G_1$ ,  $aW \subseteq aG_2 \cong G_2$ , 故  $Pb$  与  $aW$  是边不交.

在提出主要结论之前, 引入下面的主要引理, 它是由 Chiue 和 Shieh<sup>[7]</sup> 得到的.

**引理 3** 若  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$  分别是  $G_1, G_2$  和  $G$  的边连通度, 其中图  $G$  是  $G_1$  与  $G_2$  的笛卡尔乘积图, 则有  $\lambda \geq \lambda_1 + \lambda_2$ .

## 2 主要结论

笛卡尔乘积图点容错直径和边容错直径的探讨并没有很长时间, 再加上点容错直径和边容错直径的研究难度很大, 所以这方面的结论不是太多. 但是, 经过不断的努力, 仍取得了一些可喜的成果. 像关于笛卡尔乘积图的点容错直径, Xu 等<sup>[5]</sup> 证明了: 设  $G_i$  是  $k_i$  点连通无向图,  $k_i \geq 1, i = 1, 2$ , 则  $D_{k_1+k_2}(G_1 \times G_2) \leq D_{k_1}(G_1) + D_{k_2}(G_2) + 1$ ; Chiue 和 Shieh<sup>[5]</sup> 研究了多个图笛卡尔乘积的点容错直径, 并得到了一个更广泛的结果, 这里不再详细地说明. 而现在对笛卡尔乘积图边容错直径的讨论似乎还不是太多, 似乎是由于删除边与删除点产生的效果有很大不同造成的, 但有时两者的证明思想或许可以相互借鉴. 此处尝试修改和简化 Xu 等<sup>[5]</sup> 的方法来对笛卡尔乘积图的边容错直径进行讨论, 并得到了一个相关的结论.

根据笛卡尔乘积图、边容错直径的部分性质和引理 1-3, 将得到下面的结果.

**定理 1** 设  $G_i$  是  $t_i$  边连通无向图,  $t_i \geq 1, i = 1, 2$ , 则  $D'_{t_1+t_2}(G_1 \times G_2) \leq D'_{t_1}(G_1) + D'_{t_2}(G_2) + 1$ .

**证明** 令  $G = G_1 \times G_2, t = t_1 + t_2$ , 设  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$  分别是图  $G_1, G_2$  和  $G$  的边连通度, 显然有  $\lambda_1 \geq t_1, \lambda_2 \geq t_2$ , 且由引理 1 可得  $\lambda \geq \lambda_1 + \lambda_2 \geq t_1 + t_2 = t$ , 因此,  $D'_t(G)$  是确定的. 令  $\delta_i = \delta(G_i), i = 1, 2$ , 则  $\delta_1 \geq t_1, \delta_2 \geq t_2$ . 再令  $F \subseteq E(G), \|F\| = t - 1, x$  和  $y$  是  $G - F$  中不同的两个顶点. 由于  $F$  是边的集合, 显然  $V(G - F) = V(G)$ . 为了证明定理 1, 只需要在  $G - F$  中构造具有要求长度的  $xy$  路  $S(x, y)$ .

设  $x = x_1x_2, y = y_1y_2$ , 其中  $x_1, y_1 \in V(G_1), x_2, y_2 \in V(G_2)$ , 并设  $P(x_1, y_1)$  是  $G_1$  中最短  $(x_1, y_1)$  路,  $Q(x_2, y_2)$  是  $G_2$  中最短  $(x_2, y_2)$  路.

**情形 1**  $x_2 = y_2$ .

由于  $x, y$  是不同的两个顶点, 故有  $x_1 \neq y_1$  且  $x, y \in V(G_1x_2)$ .

若  $|F \cap E(G_1x_2)| < t_1$ , 所以  $D'_{t_1}(G_1x_2)$  是确定的. 又由于  $G_1x_2$  与  $G_1$  同构, 因此  $G_1x_2 - F$  中存在长至多是  $D'_{t_1}(G_1)$  的  $xy$  路.

若  $|F \cap E(G_1x_2)| \geq t_1$ , 因为  $d_{G_2}(x_2) \geq \delta_2$ , 所以  $x_2$  在  $G_2$  中至少有  $\delta_2$  个不同的邻点, 于是令  $b_1, b_2, \dots, b_{\delta_2} \in N_{G_2}(x_2)$ , 则  $\delta_2$  个子图  $G_1b_1, G_1b_2, \dots, G_1b_{\delta_2}$  两两不交, 且都同构于  $G_1$ . 同时, 观察一个边集  $W_1 = \{(x_1x_2, x_1b_1), (x_1x_2, x_1b_2), \dots, (x_1x_2, x_1b_{\delta_2}), (y_1b_1, y_1y_2), (y_1b_2, y_1y_2), \dots, (y_1b_{\delta_2}, y_1y_2)\}$ , 由于  $x_1, y_1$  是  $G_1$  中不同的两个顶点,  $b_1, b_2, \dots, b_{\delta_2}$  是  $G_2$  中的  $\delta_2$  个不同的顶点, 所以  $W_1$  中的  $2\delta_2$  条边是两两不交的, 且这些边要么在图  $x_1G_2$  中, 要么在图  $y_1G_2$  中. 进而, 记

$$\begin{aligned} H_1 &= (x_1x_2, x_1b_1) \cup G_1b_1 \cup (y_1b_1, y_1y_2) \\ H_2 &= (x_1x_2, x_1b_2) \cup G_1b_2 \cup (y_1b_2, y_1y_2) \\ &\vdots \\ H_{\delta_2} &= (x_1x_2, x_1b_{\delta_2}) \cup G_1b_{\delta_2} \cup (y_1b_{\delta_2}, y_1y_2) \end{aligned}$$

显然,  $H_1, H_2, \dots, H_{\delta_2}$  均是  $G$  的子图, 且两两边不交. 因为  $|F \cap E(G_1x_2)| \geq t_1$ , 所以  $H_1, H_2, \dots, H_{\delta_2}$  中至少有一

个,比如说是  $H_1$  与  $F$  不交(否则  $\|F\| \geq t_1 + \delta_2 \geq t_2 + t_1$ ,这与  $\|F\| = t - 1$  相矛盾). 于是,  $S: x_1x_2 \rightarrow x_1b_1 \xrightarrow{P(x_1, y_1)b_1} y_1b_1 \rightarrow y_1y_2$  是  $G - F$  中长度不超过  $d(G_1) + 2$  的  $xy$  路.

综上所述,  $D'_i(G) \leq \max\{D'_{t_1}(G_1), 2 + d(G_1)\}$ .

**情形 2**  $x_1 = y_1$ .

由于  $x, y$  是不同的两个顶点,故有  $x_2 \neq y_2$  且  $x, y \in x_1G_2$ .

接着使用与情形 1 中类似的方法,很容易得出,  $D'_i(G) \leq \max\{D'_{t_2}(G_2), 2 + d(G_2)\}$ .

**情形 3**  $x_2 \neq y_2$  且  $x_1 \neq y_1$ .

(a)  $|E(G_1x_2) \cap F| \leq t_1 - 1$  且  $|E(y_1G_2) \cap F| \leq t_2 - 1$ . 根据边容错直径的定义,此时  $D'_{t_1}(G_1x_2)$  与  $D'_{t_2}(y_1G_2)$  均是确定的. 于是  $S: x_1x_2 \xrightarrow{G_1x_2 - F} y_1x_2 \xrightarrow{y_1G_2 - F} y_1y_2$  是  $G - F$  中长度不超过  $D'_{t_1}(G_1) + D'_{t_2}(G_2)$  的  $xy$  路.

(b)  $|E(G_1x_2) \cap F| \geq t_1$ . 于是  $|E(y_1G_2) \cap F| \leq |F| - |E(G_1x_2) \cap F| \leq t_2 - 1$ ,同时  $|E(G - G_1x_2) \cap F| \leq t_2 - 1$ ,得到  $D'_{t_2}(y_1G_2)$  是确定的. 同情形 1 中相类似,令  $b_1, b_2, \dots, b_{\delta_2} \in N_{G_2}(x_2)$ ,  $W_2 = \{(x_1x_2, x_1b_1), (x_1x_2, x_1b_2), \dots, (x_1x_2, x_1b_{\delta_2})\}$ . 显然,  $W_2 \subset W_1$ ,故  $W_2$  中  $\delta_2$  条边也是两两不交的,且全部在图  $x_1G_2$  中. 于是,记

$$T_1 = (x_1x_2, x_1b_1) \cup G_1b_1$$

$$T_2 = (x_1x_2, x_1b_2) \cup G_1b_2$$

⋮

$$T_{\delta_2} = (x_1x_2, x_1b_{\delta_2}) \cup G_1b_{\delta_2}$$

易知,  $T_1, T_2, \dots, T_{\delta_2}$  都是图  $G$  的子图,且两两边不交. 因为  $|E(G - G_1x_2) \cap F| \leq t_2 - 1$ ,所以其中至少有一个,不妨说是  $T_1$  与  $F$  不交. 于是,  $S: x_1x_2 \rightarrow x_1b_1 \xrightarrow{P(x_1, y_1)b_1} y_1b_1 \xrightarrow{y_1G_2 - F} y_1y_2$  是  $G - F$  中长度不超过  $1 + d(G_1) + D'_{t_2}(G_2)$  的  $xy$  路.

(c)  $|E(y_1G_2) \cap F| \geq t_2$ . 于是  $|E(G_1x_2) \cap F| \leq |F| - |E(y_1G_2) \cap F| \leq t_1 - 1$ ,同时  $|E(G - y_1G_2) \cap F| \leq t_1 - 1$ . 采用与(b)中相类似的方法,可以在  $G - F$  中找到一条长度不会超过  $1 + d(G_2) + D'_{t_1}(G_1)$  的  $xy$  路.

由前面边容错直径的性质,可以得到  $d(G_1) = D'_1(G_1) \leq D'_2(G_1) \leq \dots \leq D'_{t_1}(G_1)$  与  $d(G_2) = D'_1(G_2) \leq D'_2(G_2) \leq \dots \leq D'_{t_2}(G_2)$ ,利用这两个不等式可以对(a)(b)和(c)结果进行适当的放缩汇总,进而有  $D'_i(G_1 \times G_2) \leq D'_{t_1}(G_1) + D'_{t_2}(G_2) + 1$ . 定理 1 得证.

可以通过考察一些实例来验证定理 1. 先看图  $G = C_4 \times C_4$ ,其中  $C_4$  是顶点为  $\{1, 2, 3, 4\}$  的无向圈,如图 1.

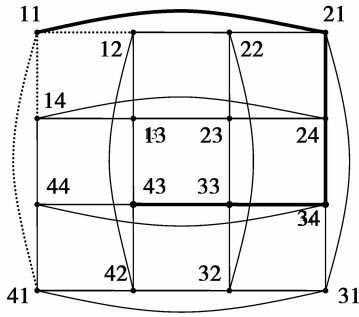
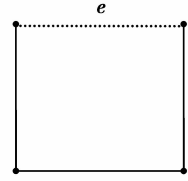
$$\lambda(C_4) = 2, D'_2(C_4) = 3, \lambda(G) = 4 = \lambda(C_4) + \lambda(C_4)$$

经过计算,发现取  $F = \{(11, 12), (11, 14), (11, 41)\}$  (图 1 中虚线部分),则  $D'_4(C_4 \times C_4)$  的值就是顶点 11 和 43 在  $G - F$  中的距离. 在图 1 中用黑线部分标示出了顶点 11 到 43 的一条最短路,容易看出它的值是 5,因此,  $5 = D'_4(C_4 \times C_4) \leq D'_2(C_4) + D'_2(C_4) + 1 = 7$ .

再看图  $G = P_2 \times P_2 = C_4$ ,其中  $P_2$  是长为 1 的路,如图 2.

$$\lambda(P_2) = 1 = d(P_2) = D'_1(P_2), \lambda(C_4) = 2 = \lambda(P_2) + \lambda(P_2)$$

任取  $C_4$  的一条边,比如说是  $e$ ,使  $F = \{e\}$  (图 2 中虚线部分). 于是,

图 1  $G = C_4 \times C_4$ 图 2  $G = P_2 \times P_2$ 

$$D'_2(P_2 \times P_2) = 3 = 1 + 1 + 1 = D'_1(P_2) + D'_1(P_2) + 1$$

这个例子还说明定理 1 的上界已经是最好的了。

### 参考文献:

- [1] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 合肥:中国科技大学出版社,1998
- [2] WHITNEY H. Congruent graphs and the connectivity of graphs[J]. American Journal of Mathematics, 1932(54):150-168
- [3] 徐俊明. 组合网络理论[M]. 北京:科学出版社,2008
- [4] PLESNIK J. Note on diametrically critical graphs[J]. In Recent Advances in Graph Theory, Prague: Academia, 1975:455-465
- [5] XU M, XU J M, HOU X M. Fault diameter of Cartesian product graphs[J]. Information Processing Letters, 2005, 95(5): 245-248
- [6] BANIE I, EROVNIK J. The fault-diameter of Cartesian products[J]. Appl Math, 2008(40):98-106
- [7] CHIUE W S, SHIEH B S. On connectivity of the Cartesian product of two graphs[J]. Applied Math and Computation, 1999, 102: 129-137

## Edges Fault-tolerance Diameter on the Cartesian Product Graphs

LIU Qi-yun, WANG Jin-jian, XIE Kun

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China)

**Abstract:** The method of Cartesian product is widely used as constructing large interconnection networks from many specific small networks. In this paper, we study the edge fault-tolerant diameter of Cartesian product graphs, which is an important measurement for reliability and efficiency of interconnection networks. Let  $G_1, G_2$  be  $t_1$ -edge-connected graph and  $t_2$ -edge-connected graph respectively, then the edge fault-tolerant diameter of  $G_1 \times G_2$  has an optimal upper bound that  $D'_{t_1+t_2}(G_1 \times G_2) \leq D'_{t_1}(G_1) + D'_{t_2}(G_2) + 1$ , where  $t_1, t_2 \geq 1$ .

**Key words:** edge-connected; Cartesian product; edge fault-tolerant diameter