文章编号:1672 - 058X(2012)08 - 0015 - 03

# $F$ 幂群的直积*

杨培亮, 王少敏
(大理学院 数学与计算机学院,云南 大理 671003)

**摘 要**:讨论了 $F$ 幂群的直积,得到了群 $X_1$ 和 $X_2$ 上的 $F$ 幂群与 $X_1 \times X_2$ 上的 $F$ 幂群的关系;进一步讨论了有限个 $F$ 幂群的直积.

**关键词**:$F$ 幂群;直积;直积群
**中图分类号**:O152 **文献标志码**:A

模糊数学的发展突出了极值映射的重要性,各种数学结构需要由论域向其幂集上提升,如序结构的提升、可测结构的提升、拓扑结构的提升等等[1]. 于是开始了幂群、幂环、超拓扑群、粗糙幂半群的研究[2-7]. 模糊数学的发展要求各种数学结构不但要由论域向其幂集上提升,而且还要求向模糊幂集上提升. 于是开始了 Fuzzy 幂群、Fuzzy 幂环的研究[7-10]. 文献[1]首先提出 Fuzzy 幂群的概念,讨论了 Fuzzy 幂群的结构及其同态问题. 在文献[1]的基础上进一步研究了 $F$ 幂群,讨论了 $F$ 幂群的直积.

## 1 预备知识

全文始终假定 $X$ 是一个群,$X$ 上的全体 Fuzzy 子集记为 $F(X)$.

由多元扩展原理,群 $X$ 中的运算可以扩展到 $F(X)$ 中:$\forall A,B \in F(X)$,定义

$$AB = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_\lambda B_\lambda) \tag{1}$$

其中,$A_\lambda$ 是 $A$ 的 $\lambda$ 截集,定义

$$A_\lambda B_\lambda = \{ab \mid a \in A_\lambda, b \in B_\lambda\}$$

不妨约定,$\varnothing A = A\varnothing = \varnothing$.

几个结论[1]:

(1) $AB(x) = \bigvee_{\substack{yz=x \\ y,z \in X}} (A(y) \wedge B(z)), x \in X$.

(2) $AB = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_{\underset{\cdot}{\lambda}} B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$.

(3) $AB = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(H_A(\lambda) H_B(\lambda))$.

其中,$\forall \lambda \in [0,1]$,$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H_A(\lambda) \subseteq A_\lambda$,$B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H_B(\lambda) \subseteq B_\lambda$,且

$$(AB)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H_A(\alpha) H_B(\alpha) = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

(4) $(AB)C = A(BC)$, $A,B,C \in F(X)$.

收稿日期:2011 - 12 - 24;修回日期:2012 - 02 - 21.
* 基金项目:云南省教育厅科学研究基金项目(09Y0367).
作者简介:杨培亮(1976-),女,云南大理人,硕士,讲师,从事代数理论及模糊数学研究.

**定义 1**[1] 设 $X$ 是群,$R\subseteq F(X)$,若 $R$ 对运算(1)构成群,则称 $R$ 为 $X$ 上的一个 $F$ 幂群,其单位元用 $E$,$A\in R$,$A$ 的逆元用 $A^{-1}$表式.

约定$\varnothing$是 $F$ 幂群,显然幂群也是 $F$ 幂群.

## 2 $F$ 幂群的直积

先讨论两个 $F$ 幂群的直积,再推广到有限个 $F$ 幂群的直积.

**定理 1** 设 $X_1,X_2$ 是群,$X=X_1\times X_2$ 是 $X_1$ 与 $X_2$ 的直积群,设 $R_1$ 与 $R_2$ 分别是群 $X_1$ 与 $X_2$ 上的 $F$ 幂群,作 $R=R_1\times R_2=\{(A_1,A_2)\mid A_1\in R_1,A_2\in R_2\}$ 在 $R$ 上定义乘法:

$$(A_1,A_2)(B_1,B_2)=(A_1B_1,A_2B_2),A_1,B_1\in \boldsymbol{R}_1,A_2,B_2\in \boldsymbol{R}_2$$

则 $\boldsymbol{R}$ 是 $X$ 上的 $F$ 幂群.

**证明** 1) $\forall(A_1,A_2),(B_1,B_2),(C_1,C_2)\in\boldsymbol{R}$,有

$$((A_1,A_2)(B_1,B_2))(C_1,C_2))=((A_1B_1)C_1,(A_2B_2)C_2)=(A_1(B_1C_1),A_2(B_2C_2))=$$
$$(A_1,A_2)((B_1,B_2)(C_1,C_2))$$

2) $(A_1,A_2)(E_1,E_2)=(A_1E_1,A_2E_2)=(A_1,A_2)=(E_1A_1,E_2A_2)=(E_1,E_2)(A_1,A_2)$,因而$(E_1,E_2)$是单位元.

3) $(A_1,A_2)(A_1^{-1},A_2^{-1})=(A_1A_1^{-1},A_2A_2^{-1})=(E_1,E_2)=(A_1^{-1}A_1,A_2^{-1}A_2)=(A_1^{-1},A_2^{-1})(A_1,A_2)$,因此$(A_1^{-1},A_2^{-1})$是$(A_1,A_2)$的逆元.

所以 $\boldsymbol{R}$ 是 $X$ 上的 $F$ 幂群.

**定义 2** 称定理 1 中的 $F$ 幂群 $\boldsymbol{R}$ 为 $F$ 幂群 $\boldsymbol{R}_1$ 与 $\boldsymbol{R}_2$ 的直积群.

**定理 2** 设 $X_1,X_2$ 是群,$X=X_1\times X_2$ 是 $X_1$ 与 $X_2$ 的直积群,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2$ 是 $X_1\times X_2$ 上的 $F$ 幂群,投影映射为:

$$p_i:(\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2)\to\boldsymbol{R}_i\quad(i=1,2)$$

则 $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2$ 分别为 $X_1,X_2$ 上的 $F$ 幂群.

**证明** $\forall A_1,B_1,C_1\in\boldsymbol{R}_1,A_2,B_2,C_2\in\boldsymbol{R}_2$,则$(A_1,A_2),(B_1,B_2),(C_1,C_2)\in(\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2)$

1) $(A_1,A_2)(B_1,B_2)=(A_1B_1,A_2B_2),A_1B_1\in\boldsymbol{R}_1,A_2B_2\in\boldsymbol{R}_2$. 故封闭.

2) $((A_1,A_2)(B_1,B_2))(C_1,C_2)=((A_1B_1)C_1,(A_2B_2)C_2)=(A_1,A_2)((B_1,B_2)(C_1,C_2))=(A_1(B_1C_1),A_2(B_2C_2))$. 故结合律成立.

3) 设$(E_1,E_2)$是 $\boldsymbol{R}$ 的单位元,$(E_1A_1,E_2A_2)=(E_1,E_2)(A_1,A_2)=(A_1,A_2)=(A_1,A_2)(E_1,E_2)=(A_1E_1,A_2E_2)$. 故 $E_1$ 是 $\boldsymbol{R}_1$ 的单位元,$E_2$ 是 $\boldsymbol{R}_2$ 的单位元.

4) 设$(D_1,D_2)$是$(A_1,A_2)$的逆元,$(E_1,E_2)=(D_1,D_2)(A_1,A_2)=(D_1A_1,D_2A_2)=(A_1,A_2)(D_1,D_2)=(A_1D_1,A_2D_2)$. 故 $D_1$ 是 $A_1$ 的逆元,$D_2$ 是 $A_2$ 的逆元.

综上所得 $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2$ 分别为 $X_1,X_2$ 上的 $F$ 幂群.

**定理 3** 群 $X_1$ 和 $X_2$ 上的 $F$ 幂群与 $X_1\times X_2$ 上的 $F$ 幂群可以相互唯一决定.

**证明** 由定理 1 和定理 2 可得.

下面把定理 1,定理 2,定理 3 推广到有限个 $F$ 幂群的直积.

**定理 4** 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是群,$X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ 是它的直积群,设 $\boldsymbol{R}_i$ 是 $X_i$ 上的 $F$ 幂群,则 $\boldsymbol{R}=\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}_i=(\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2\times\cdots\times\boldsymbol{R}_n)$,$\boldsymbol{R}$ 上定义乘法:

$$(A_1,A_2,\cdots,A_n)(B_1,B_2,\cdots,B_n)=(A_1B_1,A_2B_2,\cdots,A_nB_n)$$
$$A_1,B_1\in\boldsymbol{R}_1,A_2,B_2\in\boldsymbol{R}_2,\cdots,A_n,B_n\in\boldsymbol{R}_n$$

则 $\boldsymbol{R}$ 是 $X$ 上的 $F$ 幂群.

证明与定理 1 的证明类似.

**定义 3**　称定理 4 中的 $F$ 幂群 $\boldsymbol{R}$ 为有限个 $F$ 幂群 $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\cdots,\boldsymbol{R}_n$ 的直积群.

**定理 5**　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是群,$X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ 是它们的直积群,$\boldsymbol{R}=\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}_i$ 是 $X$ 上的 $F$ 幂群,投影映射为:

$$p_i:(\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2\times\cdots\times\boldsymbol{R}_n)\to\boldsymbol{R}_i$$

则 $\boldsymbol{R}_i$ 分别为 $X_i$ 上的 $F$ 幂群.

证明与定理 2 的证明类似.

**定理 6**　群 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 上的 $F$ 幂群与 $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ 上的 $F$ 幂群可以相互唯一决定.

**证明**　由定理 5 和定理 6 可得.

**参考文献:**

[1] 罗承忠,米洪海. Fuzzy 幂群[J]. 模糊系统与数学,1994,8(1):1-9
[2] 丰建文,方成鸿,汤文菊. 幂环的结构与分类[J]. 模糊系统与数学,2008,12(6):47-52
[3] 杨培亮,刘文军. 超拓扑群的连通性[J]. 科学技术与工程,2011,7(19):4553-4555
[4] 张振良,张金玲,肖旗梅. 模糊代数与粗超代数[M]. 武汉:武汉大学出版社,2007
[5] 王开宝,祝令江,姚炳学,等. 幂群的结构与构造[J]. 科学技术与工程,2008,6(12):3067-3070
[6] 王开宝,祝令江,王丽,等. 幂群结构的推广[J]. 聊城大学学报,2008,6(2):55-56
[7] 杨培亮,王少敏. 粗糙幂半群[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,11(6):577-579
[8] 杨培亮,张振良. $F$ 幂群的性质与结构[J]. 纯粹数学与应用数学,2002,9(3):282-287
[9] 杨培亮,张振良. $F$ 幂群的分类[J]. 模糊系统与数学,2003,3(1):53-58
[10] 张晓丽,张振良. 模糊幂环[J]. 模糊系统与数学,2004,3(1):31-35

# Direct Product of Fuzzy Power Group

**YANG Pei-liang, WANG Shao-min**

(Department of Mathematics and Computer Science, Dali University, Yunnan Dali 671003, China)

**Abstract:** This paper discusses direct product of fuzzy power group, obtains the relation between fuzzy power group on group $X_1$ and $X_2$ and fuzzy power group on $X_1\times X_2$ and further discusses the direct product of finite fuzzy power groups.

**Key words:** fuzzy power group; direct product; direct product group

责任编辑:李翠薇