文章编号:1672 - 058X(2012)08 - 0011 - 04

树上 n 维乘积自映射等度连续的充要条件*

杨　柳

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:主要讨论了树上 n 维乘积自映射的一些性质,给出了它在周期点集上等度连续的几个充要条件.

关键词:等度连续;树映射;异状点;拓扑熵

中图分类号:O192　　**文献标志码:**A

在动力系统的研究中,不变点集性质的研究是十分重要的工作,对于区间上的连续自映射所产生的动力系统来说,已经有了较多而且比较深刻的结果. 此处主要研究树上 n 维乘积自映射所具有的一些性质.

系统的等度连续性是系统稳定性的一种刻划,对于区间上连续自映射和圆周自映射的周期点集上的等度连续性,文献[1]-[3]分别进行了讨论,文献[4]给出了树上连续自映射在周期点集上具有等度连续性的几个充要条件,此处在他们的基础上给出了树上 n 维乘积自映射在周期点集上具有等度连续性的 3 个充要条件.

下面给出一些基本概念和记号.

记 T 为树,即不含有圈的一维紧致连通的分支流形,$f\in C^{\circ}(X,X)$ 表示紧致度量空间 (X,d) 上的连续自映射,$T,T_1,T_2,\cdots,T_n$ 均表示树,设 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 是紧致度量空间,

定义 1[1]　设 X 为一拓扑空间,$f\in C^{\circ}(X,X)$,用 f° 表示恒等映射,对任意自然数 n,归纳地定义 $f^1=f$, $f^2=f\circ f,\cdots,f^n=f\circ f^{n-1}$.

定义 2[1]　设 $x\in X$,若存在自然数 n,使得 $f^n(x)=x$,则称 x 为 f 的周期点,f 的周期点集记作 $P(f)$.

定义 3[2]　设 $x\in X$,若对 x 的任何邻域 $V(x)$,存在自然数 n,使得 $f^n(x)\in V(x)$,则称 x 为 f 的回归点,记 f 的回归点集为 $R(f)$.

定义 4[2]　设 $f\in C^{\circ}(X,X)$,称 x 是 f 的异状点,若存在 $p\in P(f)$,满足

①$x\neq p$;②$x\in W^u(p,f^n)$,这里 $W^u(p,f)$ 表示 p 的非稳定流形,n 是 p 的周期;③存在 $m\in\mathbf{N}$,$f^{mn}(x)=p$.

定义 5[5]　设 $f\in C^{\circ}(X,X)$,若 $\forall\varepsilon>0$,$\forall p\in P(f)$,存在 p 的邻域 $V(p)$,使得直径 $\mathrm{diam}(f^m(V(p)\cap P(f)))<\varepsilon$,$\forall m\geqslant 0$,则称 $f|_{P(f)}$ 等度连续.

定义 6[5]　$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的度量 ρ 为

$$\rho_1((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)) = \sqrt{d_1^2(x_1,y_1)+d_2^2(x_2,y_2)+\cdots+d_n^2(x_n,y_n)}$$
$$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$$

收稿日期:2011 - 12 - 06;**修回日期:**2011 - 12 - 28.

* **基金项目:**国家自然科学基金资助项目(10971240).

作者简介:杨柳(1987-) ,女,重庆人,硕士研究生,从事拓扑动力系统研究.

1 若干引理

引理1 若$f\in C^{\circ}(T,T)$,则$f|_{P(f)}$具有等度连续性等价于$h(f)=0$.

引理2[4] 设$f_i\in(X_i,X_i)$,则$(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)|_{P(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)}$具有等度连续性等价于$f_i|_{P(f_i)}(i=1,2,\cdots,n)$.

引理3 若$f\in C^{\circ}(X,X)$,$p\in F(f^n)$,$n>0$,则$W^u(p,f^n)=W^u(p,f^{kn})$,$\forall k>0$.

引理4 若$f_i\in C^{\circ}(X,X)(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$W^u((p_1,p_2,\cdots,p_n),(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^m)=W^u(p,f_1^{m_1})\times W^u(p,f_1^{m_2})\times\cdots\times W^u(p_n,f_n^{m_n})$$

其中$m=[m_1,m_2,\cdots,m_n]$为$m_1,m_2,\cdots,m_n$的最小公倍数,$m_1,m_2,\cdots,m_n$分别是$p_1,p_2,\cdots,p_n$的周期.

证明 $\forall z=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W^U((p_1,p_2,\cdots,p_n),(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n)$,设$V(p_i)$分别是$p_i$的任意一个邻域,则$V(p_1)\times V(p_2)\times\cdots\times V(p_n)$是$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$的一个邻域.由于$z\in W^U(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,存在$k>0$,使得$z=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in(f_1\times f_2x\times\cdots\times f_n)^{kn}(V(P_1)\times V(P_2)\times\cdots\times V(P_n))$,从而$x_i\in f_i^{kn}(V(p_i))$,即$x_i\in W^U(p_i,f_i^{m_i})$.故$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W^U(p_1,f_1^{m_1})\times W^U(p_2,f_2^{m_2})\times\cdots\times W^U(p_n,f_n^{m_n})$,即

$$W^U((p_1,p_2,\cdots,p_n),(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n)\subset W^U(p_1,f_1^{m_1})\times W^U(p_2,f_2^{m_2})\times\cdots\times W^U(p_n,f_n^{m_n})$$

反之,$\forall x_i\in W^U(p_i,f_i^{m_i})(i=1,2,\cdots,n)$,令$z=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,下证$z\in W^U((p_1,p_2,\cdots,p_n),(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n)$,因$x_i\in W^U(p_i,f_i^{m_i})(i=1,2,\cdots,n)$,由引理4,存在$z_{l_i}\to p_i$及$m_{l_i}$,使$f_i^{nm_{l_i}}(z_{l_i})\to x_i$,$l_i\to+\infty$,$i=1,2,\cdots,n$,若$m_{l_i}=m_{l_{i+1}}$对于无穷多个$l_i$成立,则$(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n(z_{l_1},z_{l_2},\cdots,z_{l_n})\to(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,且$(z_{l_1},z_{l_2},\cdots,z_{l_n})\to(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,不妨设$m_{l_i}>m_{l_{i+1}}$,对于无穷多个$k$成立.

令$t_i=f_i^{n(m_{l_i}-m_{l_{i+1}})}(z_{l_i})$,则$(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^{nm_{l_i}}(t_1,t_2,\cdots,t_n)\to(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,总之$z=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W^U((p_1,p_2,\cdots,p_n),(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n)$,即证.

引理5 若$f\in C^{\circ}(X,X)$,则f有异状点等价于存在$n>0$,$p\in F(f^n)$,及$z\in W^U(p,f^n)$,$z\neq p$,$f^n(z)=p$.

引理6 若$f\in C^{\circ}(T,T)$,则f有异状点等价于$h(f)>0$.

引理7 设$f_i\in C^{\circ}(X_i,X_i)$,$i=1,2,\cdots,n$,则

$$CR(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=CR(f_1)\times CR(f_2)\times\cdots\times CR(f_n)$$

证明 $\forall z=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in CR(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)$,$\forall\varepsilon>0$,有$z$到$z$的$\varepsilon-$链,设为$\{z_0=z,z_1,\cdots,z_n=z_0\}$,令$z_i=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})$,$i=1,2,\cdots,n$,由于$\rho(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n(z_{i-1}),z_i)<\varepsilon$,$i=1,2,\cdots,n$,即$\rho((f_1(x_1^{i-1}),f_2(x_2^{i-1}),\cdots,f_n(x_n^{i-1}),(x_1^i,x_2^i,\cdots,x_n^i))<\varepsilon$,从而$d_i(f_i(x_i^{i-1}),x_i^i)<\varepsilon$,故$x_i\in CR(f_i)$,即$CR(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)\subset CR(f_1)\times CR(f_2)\times\cdots\times CR(f_n)$.反之,$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in CR(f_1)\times CR(f_2)\times\cdots\times CR(f_n)$,即$x_i\in CR(f_i)$,则$\forall\varepsilon>0$,存在从$x_i$到$x_i$的$\varepsilon-$链,分别设为$\{x_i^0=x_i,x_i^1,\cdots,x_i^{m_k}=x_i^0\}$.从而可以构造$n$条长度为$m_1m_2\cdots m_k+1$的$\varepsilon-$链如下:

$$\{s_1^0,s_1^1,\cdots,s_1^{m_1m_2\cdots m_k}\},s_1^{l_1m_2\cdots m_k+h_1}=x_{h_1},0\leqslant l_1\leqslant m_1,0\leqslant h_1\leqslant m_2m_3\cdots m_k$$

$$\{s_2^0,s_2^1,\cdots,s_2^{m_1m_2\cdots m_k}\},s_2^{m_1l_2m_3\cdots m_k+h_2}=x_{h_2},0\leqslant l_2\leqslant m_2,0\leqslant h_2\leqslant m_1m_3\cdots m_k$$

$$\vdots$$

$$\{s_n^0,s_n^1,\cdots,s_n^{m_1m_2\cdots m_k}\},s_n^{m_1\cdots m_{k-1}l_n+h_n}=x_{h_n},0\leqslant l_n\leqslant m_k,0\leqslant h_n\leqslant m_1m_2\cdots m_{k-1}$$

令$z_i=(s_1^i,s_2^i,\cdots,s_n^i)$,$0\leqslant i\leqslant m_1m_2\cdots m_k$,则

$$\rho((f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)(z_{i-1}),z_i)\leqslant d_1(f_1(s_1^{i-1}),s_1^i)+d_2(f_2(s_2^{i-1}),s_2^i)+\cdots+d_n(f_n(s_n^{i-1}),s_n^i)<n\varepsilon$$

由ε的任意性,n的有限性,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in CR(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)$,从而$CR(f_1)\times CR(f_2)\times\cdots\times CR(f_n)$,即证.

引理8 设$f_i\in C(X_i,X_i)$,$i=1,2,\cdots,n$,则

$$\mathrm{Asp}(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=\mathrm{Asp}(f_1)\times\mathrm{Asp}(f_2)\times\cdots\times\mathrm{Asp}(f_n)$$

这里 $\mathrm{Asp}(f)$ 表示 f 的渐进周期点.

证明　$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathrm{Asp}(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)$,存在 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in P(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)$,使得 $\rho((f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n(x_1,x_2,\cdots,x_n),(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n(p_1,p_2,\cdots,p_n))\to0$, $n\to+\infty$,从而 $d_i(f_i^n(x_i),f_i^n(p_i))\to0$, $n\to+\infty$. 由于 $P(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=P(f_1)\times P(f_2)\times\cdots\times P(f_n)$,故 $p_i\in P(f_i)$,所以 $x_i\in\mathrm{Asp}(f_i)$,即 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathrm{Asp}(f_1)\times\mathrm{Asp}(f_2)\times\cdots\times\mathrm{Asp}(f_n)$,故 $\mathrm{Asp}(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)\subset\mathrm{Asp}(f_1)\times\mathrm{Asp}(f_2)\times\cdots\times\mathrm{Asp}(f_n)$. 反之,若 $x_i\in\mathrm{Asp}(f_i)$,存在 $p_i\in P(f_i)$,有 $d_i(f_i^n(x_i),f_i^n(p_i))\to0$, $n\to+\infty$,从而 $\rho((f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n(x_1,x_2,\cdots,x_n),(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n(p_1,p_2,\cdots,p_n))\to0$, $n\to+\infty$,又 $P(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=P(f_1)\times P(f_2)\times\cdots\times P(f_n)$,故 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in P(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)$,所以 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathrm{Asp}(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)$ 即 $\mathrm{Asp}(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)\Leftrightarrow\mathrm{Asp}(f_1)\times\mathrm{Asp}(f_2)\times\cdots\times\mathrm{Asp}(f_n)$,即证.

2　主要结果

定理 1　设 $f_i\in C^\circ(T_i,T_i)$, $i=1,2,\cdots,n$,则 $(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)|_{p(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)}$ 具有等度连续性等价于 $h(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=0$.

证明　"$\Rightarrow$" 因为 $(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)|_{p(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)}$ 具有等度连续性,由引理 2, $f_i|_{p(f_i)}$ 也具有等度连续性,再由引理 1, $h(f_i)=0$, $i=1,2,\cdots,n$,故 $h(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=h(f_1)+h(f_2)+\cdots+h(f_n)=0$.

"$\Leftarrow$"由 $h(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=0$,则 $h(f_i)=0$, $i=1,2,\cdots,n$,由引理 1, $f_i|_{p(f_i)}$ 分别具有等度连续性,再由引理 2 得 $(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)|_{p(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)}$ 具有等度连续性.

定理 2　设 $f_i\in C^\circ(T_i,T_i)$, $i=1,2,\cdots,n$,则 $(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)|_{p(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)}$ 具有等度连续性等价于 $f_1\times f_2\times\cdots\times f_n$ 没有异状点.

证明　"$\Rightarrow$"由 $(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)|_{p(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)}$ 具有等度连续性,再由定理 1, $h(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=0$,故 $h(f_i)=0$, $i=1,2,\cdots,n$,最后由引理 6, f_i 都没有异状点.

现假设 $f_1\times f_2\times\cdots\times f_n$ 有异状点 $z=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则存在 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是 $f_1\times f_2\times\cdots\times f_n$ 的周期点,满足 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq(p_1,p_2,\cdots,p_n)$.

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W^U((p_1,p_2,\cdots,p_n),(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n)$, n 是 p 的周期,且存在 $m>0$, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^{kn}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,设 p_i 的周期为 m_i, $i=1,2,\cdots,n$,则 m_i 都能整除 n,由引理 4

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W^U(p_1,f_1^{m_1})\times W^U(p_2,f_2^{m_2})\times\cdots\times W^U(p_n,f_n^{m_n})$$

故 $x_i\in W^U(p_i,f_i^{m_i})$,并且由 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^{kn}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,则 $x_i=f_i^{kn}(p_i)=f_i^{l_im n_i}(p_i)$,其中 $k_in_i=n$,又由已知 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq(p_1,p_2,\cdots,p_n)$. 则 $x_1\neq p_1$ 或 $x_2\neq p_2$ 或 $x_n\neq p_n$,不妨设 $x_1\neq p_1$,则 x_1 是 f_1 的异状点,与 f_1 没有异状点矛盾,故 $f_1\times f_2\times\cdots\times f_n$ 没有异状点.

"$\Leftarrow$"假设 $(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)|_{p(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)}$ 不是等度连续的,由定理 1, $h(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)>0$,故 $h(f_1)>0$ 或 $h(f_2)>0$ 或 $h(f_n)>0$,不妨设 $h(f_1)>0$,由引理 6, f_1 有异状点,由引理 5,存在 $n_1>0$, $p_1\in F(f_1^{n_1})$ 及 $z_1\in W^U(p_1,f_1^{n_1})$, $z_1\neq p_1$, $f_1^{n_1}(z_1)=p_1$. 设 p_i 是 f_i 的周期点 $(i=2,3,\cdots,n)$,且周期为 m_i,记 $z=(z_1,p_2,\cdots,p_n)$,由 $z_1\neq p_1$,故 $z=(z_1,p_2,\cdots,p_n)\neq(p_1,p_2,\cdots,p_n)=p$. 设 $n=[m_1,m_2,\cdots,m_n]$,则 $(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n(z)=(f_1^n(z_1),f_2^n(p_2),\cdots,f_n^n(p_n))=(p_1,p_2,\cdots,p_n)=p$,且 n 是 p 的周期.

下证 $z\in W^U((p_1,p_2,\cdots,p_n),(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n)$:

设 $V(p)$ 是 p 的任一个邻域,则存在 $V(p_i)$ 是 p_i 的邻域,满足 $V(p_1)\times V(p_2)\times\cdots\times V(p_n)\subset V(p)$,因 $z_1\in W^U(p_1,f_1^{n_1})$,由引理 3, $z_1\in W^U(p_1,f_1^n)$,从而存在 $k>0$, $z\in f_1^{kn}(V(p_1))$,又 p_i 是 f_i 的周期为 n_i 的周期点, $i=2,3,\cdots,n$,故 $p_i\in f_i^{kn}(V(p_i))$,从而 $(z_1,p_2,\cdots,p_n)\in(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^{kn}(V(p_1)\times V(p_2)\times\cdots\times V(p_n))\subset$

$f^{kn}(V(p_1))$,即 $z=(z_1,p_2,\cdots,p_n)\in W^U((p_1,p_2,\cdots,p_n),(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)^n)$,由引理 5,$f_1\times f_2\times\cdots\times f_n$ 有异状点,与已知矛盾.

定理 3 设 $f\in C^\circ(T,T)$,记 $F=\overbrace{f\times f\times\cdots\times f}^{n}$,则 $F|_{P(F)}$ 具有等度连续性等价于 $\forall z\in CR(F)\setminus P(F)$,$z\notin \mathrm{Asp}(F)$.

证明 “$\Rightarrow$”$P(F)$ 对 F 具有等度连续性,由定理 1,$h(F)=0$,故 $h(f)=0$,$\forall z=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in CR(F)\setminus P(F)$,由引理 8 及 $P(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=P(f_1)\times P(f_2)\times\cdots\times P(f_n)$,有 $x_i\in CR(f)\setminus P(f)\ (i=1,2,\cdots,n)$,由引理 12,$x_i\notin \mathrm{Asp}(f)$,由引理 9,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\notin \mathrm{Asp}(F)$.

“$\Leftarrow$”$\forall x_i\in CR(f)\setminus P(f)\ (i=1,2,\cdots,n)$,由引理 8 及 $P(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=P(f_1)\times P(f_2)\times\cdots\times P(f_n)$,则 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in CR(F)\setminus P(F)$,由已知,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\notin \mathrm{Asp}(F)$,由引理 9,$x_i\notin \mathrm{Asp}(f)$,不妨设 $x_2\notin \mathrm{Asp}(f)$,由引理 12,$h(f)=0$,从而 $h(F)=0$,故 $P(F)$ 对 F 具有等度连续性.

参考文献:

[1] 熊金城. 线段映射的动力体系:非游荡集,拓扑熵以及混乱[J]. 数学进展,1988,17(1):1-11

[2] 周作领. 线段自映射的周期点集[J]. 数学学报,1986,29(2):272-275

[3] 杨润生. 圆周自映射的周期点集的局部度量稳定性[J]. 南京师大学报:自然科学版,1998(4):14-17

[4] 严珍珍,杨润生. 树上乘积自映射周期点集的局部度量稳定性[J]. 系统科学与数学,2004,24(1):35-40

[5] 严珍珍. 周期点集的局部度量稳定性[J]. 南京师大学报:自然科学版,2001(2):7-10

[6] 牛应轩. 树映射有异状点的一个充要条件[J]. 数学研究,1999(3):272-276

[7] 孙太祥. 树映射的动力系统的研究[D]. 中山:中山大学,2001

Sufficient and Necessary Condition for Self-mapping Equicontinuity of Tree n-dimensional Product

YANG Liu

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper mainly discusses some properties of tree n-dimensional product self-mapping and gives its several sufficient and necessary conditions for equicontinuity on periodic point set.

Key words: equicontinuity; tree map; homoclinic point; topological entropy

责任编辑:李翠薇