文章编号:1672－058X(2012)07－0036－02

一类迭代函数方程解的存在性*

程传博[1], 刘世君[2]
(1. 重庆师范大学 数学学院,重庆 401331;2. 湖北省随县一中,湖北 441315)

摘 要: 利用一类迭代函数方程在递增情况下存在递增解和一类迭代函数方程在递增情况下存在递减迭代根,讨论了迭代函数方程 $\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^3(x)+\cdots+\lambda_n f^{2n-1}(x)=F(x)$(其中 $F(x)$ 为单调递减连续函数)的解的存在情况,并简单的讨论了其解的一个性质.

关键词: 迭代;迭代函数方程;单调递减连续函数

中图分类号: O174.1 **文献标志码:** A

迭代根是一个很古老的问题,早在百年前 C. Babbage,N. H. Abel 等数学家就开始了这一研究. 以后经过 R. Isaacs,Hardy-Böedewate,Kuczma. M,张景中,杨路等人的不断推进有了很大的发展.

随之而来的迭代函数方程的问题困扰了人们一段时间,近年来,麦结华,赵立人,张伟年,司建国等人在诸如 $f^2(x)=af(x)+bx$, $\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)=F(x)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(x)f^i(x)=F(x)$, $H(x,\varphi^{n_1}(x),\varphi^{n_2}(x),\cdots,\varphi^{n_k}(x))=F(x)$ 类型的迭代函数方面做了很深入、细致的研究. 但是这几种类型几乎都是在单调递增的情况下讨论的. 现试图对一类迭代函数方程在单调递减的情况下讨论其解的存在性.

1 预备知识

首先给出后面用到的一些符号和引理,

函数的迭代记法

$$f^0(x)=x, f^2(x)=f(f(x)),\cdots,f^k=f(f^{k-1}(x))$$

$$CI(I,I)=\{f(x)\in C(I,I)\mid f(a)=a,f(b)=b,\text{对 }\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2\text{ 有 }f(x_1)<f(x_2)\}$$

$$DI(I,I)=\{f(x)\in C(I,I)\mid f(a)=b,f(b)=a,\text{对 }\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2\text{ 有 }f(x_1)>f(x_2)\}$$

引理 1[1] 迭代函数方程 $f^n(x)=F(x)$ 成立,若 $F(x)$ 为满射、单射或双射,则 $f(x)$ 也为满射、单射或双射.

引理 2[2] 迭代函数方程

$$\lambda_1 f^1(x)+\lambda_2 f^2(x)+\cdots+\lambda_n f^n(x)=F(x) \tag{1}$$

且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1(\lambda_i>0)$,若 $F(x)\in CI(I,I)$,那么方程(1) 在 $CI(I,I)$ 上存在解.

引理 3[3] 迭代函数方程 $f^n(x)=F(x)$,

(1) 若 $F(x)\in C(I,I)$ 严格递增. 那么对 $\forall n\in N_+$, $f(x)$ 存在且连续严格递增.

收稿日期: 2011－12－23;**修回日期:** 2012－01－11.

* **基金项目:** 国家自然科学基金(10971240).

作者简介: 程传博(1986-),男,河南禹州人,硕士研究生,从事拓扑动力系统研究.

(2) 若 $F(x)\in CI(I,I)$ 且 $\zeta\in \mathrm{Fix}(F)$ 使得存在严格递减满射 $\alpha:\mathrm{Fix}(F)\cap[a,\zeta]\to \mathrm{Fix}(F)\cap[\zeta,b]$ 满足 $(F(x)-x)(F(y)-y)<0,\forall x\in(a,b),\forall y\in(\alpha(b),\alpha(a))$. 其中 (a,b) 是并成 $[a,\zeta]\backslash \mathrm{Fix}(F)$ 的若干个不相交的开区间的任意一个,那么 $F(x)$ 有 2 次严格的递减连续迭代根.

2 主要结论

定理 1 迭代函数方程

$$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^3(x)+\cdots+\lambda_n f^{2n-1}(x)=F(x) \tag{2}$$

且满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1(\lambda_i>0)$,若 $F(x)\in DI(I,I)$,那么方程(2) 在 $DI(I,I)$ 上存在解.

证明 由原方程(2)可得 $\lambda_1 f^2(x)+\lambda_2 f^4(x)+\cdots+\lambda_n f^{2n}(x)=F(f(x))$

令 $f^2(x)=g(x),F(f(x))=G(x)$ 则 $\lambda_1 g(x)+\lambda_2 g^2(x)+\cdots+\lambda_n g^n(x)=G(x)$,其中 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1(\lambda_i>0)$, 容易知道 $G(x)\in CI(I,I)$,由引理 2 可知函数方程在 $CI(I,I)$ 中存在解 $g(x)$.

又由引理 1 和引理 3 可知 $g(x)$ 存在 2 次严格单调递减的连续迭代根.

性质 1 方程(2)成立. 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有唯一的不动点,并且也是 $F(x)$ 的不动点.

证明 由 $f(x)\in DI(I,I)$ 可知 $f(a)=b,f(b)=a$.

令 $M(x)=f(x)-x$,容易知道 $M(x)$ 在 I 上严格单调递减连续,且 $M(a)M(b)<0$,从而有唯一零点 x_0 使得 $M(x_0)=f(x_0)-x_0=0$,亦即 $f(x)$ 在 (a,b) 上有唯一的不动点. 又 $F(x_0)=\lambda_1 f(x_0)+\lambda_2 f^3(x_0)+\cdots+\lambda_n f^{2n-1}(x_0)=x_0$,从而 x_0 也为 $F(x)$ 的不动点.

参考文献:

[1] KUCZMA M, CHOCZEWSKI B, GER R. Iterative function equations. Encyclopedia of mathematics and its applications[M]. Cambridge University Press, 1900

[2] 张伟年. 关于迭代方程 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$ 解存在性的讨论[J]. 数学通报, 1986, 31(7): 1290-1295

[3] 张伟年. 动力系统基础[M], 北京: 高等教育出版社, 2011

[4] 毛冉. 动力系统点集 n 次的迭代不变性[J]. 重庆工商大学学报, 2011, 28(6): 558-563

The Existence of the Solutions to a Class of Iterative Function Equations

CHENG Chuan-bo[1], LIU Shi-jun[2]

(1. School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China;
2. No. 1 Middle School, Suixian County, Hubei Suixian 441315, China)

Abstract: Based on that ascending solutions exist in a class of iterative function equations under the ascending condition and that descending iterative roots exist in a class of iterative function equations under ascending condition, this paper discusses the conditions for the existence of the solutions to the iterative function equation $\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^3(x)+...+\lambda_n f^{2n-1}(x)=F(x)$, here F(x) is monotonically descending continuous function, and simply discusses a property of its solution.

Key words: iteration; iterative function equation; monotonically descending continuous function

责任编辑:田 静