文章编号:1672 - 058X(2012)07 - 0033 - 03

关于方阵幂级数收敛性判定定理的一些注记

郭 华
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要: 研究了矩阵幂级数,利用方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和方阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂级数系数之间的各种关系,给出了方阵幂级数绝对收敛和发散的一系列判定法.

关键词: 矩阵幂级数;谱半径;矩阵范数;特征值;绝对收敛

中图分类号: O151. 21 **文献标志码:** A

定义 1[1] 设 $A_k = (a_{ij}^{(k)}) \in C^{m \times n}$,若 $m \times n$ 个常数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ $(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$ 都收敛,便称矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k = A_0 + A_1 + \cdots + A_k + \cdots$ 收敛;若 $m \times n$ 个常数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ $(i = 1,2,\cdots;m,j = 1,2,\cdots,n)$ 都绝对收敛,便称矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 绝对收敛.

定义 2[1] 设 $A_k = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$,称形如 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_k A^k + \cdots$ 的矩阵级数为方阵幂级数.

定义 3[1] 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值,记 $\rho(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{|\lambda_i|\}$,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径.

定理 1[1] 设 $A_k = (a_{ij}^{(k)}) \in C^{n \times n}$,则矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 绝对收敛的充分必要条件是正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ 收敛,其中 $\|A\|$ 为任何一种范数.

定理 2[2] 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一范数 $\|\boldsymbol{A}\|$ 在数项幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛域内,则方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛.

证明 设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛域为 $|x| < R$. 由条件,当 $\|A\| < R$ 时,数项幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \|A\|^k$ 绝对收敛,即 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|A\|^k$ 收敛,而 $\|a_k A^k\| = |a_k| \cdot \|A^k\| \leqslant |a_k| \cdot \|A\|^k$,由正项级数的比较判别法,得 $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k A^k\|$ 收敛. 由定理 1 得 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛.

定理 3[1] 设数项幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛半径为 R,$A \in C^{n \times n}$,若 $\rho(A) < R$,则方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛;若 $\rho(A) > R$,则方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散.

推论 1 设 $A \in C^{n \times n}$,对方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$,如 $\lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho \neq 0$,则当 $\rho(A) < \frac{1}{\rho}$ 时,方阵幂级数

收稿日期:2011 - 12 - 05;修回日期:2012 - 01 - 10.

作者简介:郭华(1962-),女,重庆市北碚区人,副教授,从事矩阵理论研究.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛;当 $\rho(A) > \frac{1}{\rho}$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散.

注意到数项幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$,易知上述推论成立.

推论 2 设 $A \in C^{n\times n}$,对方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^{km+b}$($m$ 为自然数,b 为整数),如 $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho \neq 0$,则当 $\rho(A) < \frac{1}{\rho^{\frac{1}{m}}}$ 时,方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^{km+b}$ 绝对收敛;当 $\rho(A) > \frac{1}{\rho^{\frac{1}{m}}}$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^{km+b}$ 发散.

证明 只需证明数项幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{km+b}$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho^{\frac{1}{m}}}$.

由幂级数的比值判别法: $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}x^{m(k+1)+b}}{a_k x^{mk+b}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |x|^m = \rho|x|^m$.

当 $\rho|x|^m < 1$ 时,即 $|x| < \frac{1}{\rho^{\frac{1}{m}}}$ 时,数项幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{km+b}$ 收敛;当 $\rho|x|^m > 1$ 时,即 $|x| > \frac{1}{\rho^{\frac{1}{m}}}$ 时,数项幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{km+b}$ 发散. 所以 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{km+b}$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho^{\frac{1}{m}}}$. 再由定理 3 知结论成立.

推论 3 设 $A \in C^{n\times n}$,对方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - x_0E)^k$,当 $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho \neq 0$ 时,且 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 λ_1, $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 满足 $|\lambda_i - x_0| < \frac{1}{\rho}(i = 1,2,\cdots,n)$ 时,方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - x_0E)^k$ 绝对收敛;如存在某个特征值 $\lambda_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使 $|\lambda_i - x_0| > \frac{1}{\rho}$,方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - x_0E)^k$ 发散.

证明 令 $B = A - x_0E$,则 B 的 n 个特征值就为 $\lambda_1 - x_0, \lambda_2 - x_0, \cdots, \lambda_n - x_0$, $\rho(B) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\lambda_i - x_0|\}$,当 $|\lambda_i - x_0| < \frac{1}{\rho}(i = 1,2,\cdots,n)$ 时,即 $\rho(B) < \frac{1}{\rho}$,由推论 1 可知 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k$ 绝对收敛,也即是 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - x_0E)^k$ 绝对收敛;如存在某个特征值 $\lambda_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使 $|\lambda_i - x_0| > \frac{1}{\rho}$,即 $\rho(B) > \frac{1}{\rho}$,由推论 1 可知 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k$ 发散,即是方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - x_0E)^k$ 发散. 同样可得:

推论 4 设 $A \in C^{n\times n}$,对方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - x_0E)^{km+b}$($m$ 为自然数,b 为整数),如 $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho \neq 0$,则当 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 满足 $|\lambda_i - x_0| < \frac{1}{\rho^{\frac{1}{m}}}(i = 1,2,\cdots,n)$ 时,方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - x_0E)^{km+b}$ 绝对收敛;当 $|\lambda_i - x_0| > \frac{1}{\rho^{\frac{1}{m}}}$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - x_0E)^{km+b}$ 发散.

推论 5 对方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = E + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$,当则当 $\rho(A) < 1$ 时,方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛;当 $\rho(A) > 1$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散.

注意到 $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$,再由推论 1 可知结论成立.

推论 6 设有方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho$,当 $\boldsymbol{A}$ 是如下两类矩阵时:(1) 酉矩阵(或正交矩阵);(2) 幂等矩阵($A^2 = A$). 则当 $\rho < 1$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛;当 $\rho > 1$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散.

证明　因酉矩阵(或正交矩阵)的任一特征值 λ 的模 $|\lambda|=1$(设 $A\alpha=\lambda\alpha$,则两边取共轭转置:$(\overline{A\alpha})^{T}=(\overline{\lambda\alpha})^{T}$,即 $\overline{\alpha}^{T}\overline{A}^{T}=\overline{\lambda}\cdot\overline{\alpha}^{T}$,于是 $\overline{\alpha}^{T}\cdot\alpha=\overline{\alpha}^{T}(\overline{A}^{T}A)\alpha=(\overline{A\alpha})^{T}(A\alpha)=\overline{\lambda}\cdot\lambda(\overline{\alpha}^{T}\cdot\alpha)$,即可得 $\overline{\lambda}\cdot\lambda=1$,即 $|\lambda|=1$.),而幂等矩阵的特征值只能是 0 或 1(因为 $A^{2}\alpha=A\alpha=\lambda\alpha$,而 $A^{2}\alpha=\lambda^{2}\alpha$,,于是 $\lambda^{2}\alpha=\lambda\alpha$,可得 $\lambda^{2}=\lambda$,所以 $\lambda=0,1$.),所以当 $\boldsymbol{A}$ 是以上两类矩阵时,就有 $\rho(A)=1$.

当 $\rho<1$ 时,$\frac{1}{\rho}>1$,此时,$\rho(A)=1<\frac{1}{\rho}$,由推论 1,$\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}A^{k}$ 绝对收敛.

当 $\rho>1$ 时,$\frac{1}{\rho}<1$,此时,$\rho(A)=1>\frac{1}{\rho}$,由推论 1,$\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}A^{k}$ 发散.

定理 4[2]　设 $A\in C^{n\times n}$,对方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}A^{k}$,如 $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k}}\right|=\rho=+\infty$,则当 $\boldsymbol{A}$ 存在非零特征值时,方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}A^{k}$ 发散;当 $\boldsymbol{A}$ 只有零特征值时,方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}A^{k}$ 绝对收敛.

定理 5　设 $A\in C^{n\times n}$,对方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}A^{k}$,当 $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k}}\right|=\rho=0$ 时,一定有 $\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}A^{k}$ 绝对收敛.

证明　因 $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k}}\right|=\rho=0$,可得数项幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}x^{k}$ 在整个复平面都收敛,设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 λ_{1},λ_{2},…,λ_{n},总可以取到一个正数 R,使得 $|\lambda_{i}|<R(i=1,2,\cdots,n)$,而 $\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}x^{k}$ 在 $|x|<R$ 内收敛. 因为 $\rho(A)<R$,由定理 3,$\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}A^{k}$ 绝对收敛.

参考文献:

[1] 史荣昌. 矩阵分析[M]. 北京:北京理工大学出版社,1996

[2] 郭华. 正规矩阵的范数和它的幂级数收敛性[J]. 重庆:重庆工商大学学报:自然科学版,2011(1):18-21

[3] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 北京:高等教育出版社,2007

[4] 超玉平. 矩阵幂级数绝对收敛的判定[J]. 甘肃联合大学学报:自然科学版,2007(5):12-14

[5] 张忠诚. 幂级数的推广[J]. 长春师范学院学报:自然科学版,2005,24(2):4-5

[6] 沈浮,王俊. 正项矩阵级数的敛散性研究[J]. 工科数学,2000(3): 114 -116

[7] 方洋旺. 关于函数矩阵幂级数的几个性质[J]. 青海师范大学:自然科学版,1993(3):20-24

Notes on Determination Theorem of the Convergence of Square Matrix Power Series

GUO Hua

(School of Mathematics and Statistics,Chongqing Technology and Business University,Chongqing 400067,China)

Abstract:The matrix power series is studied, by using all kinds of relations between eigenvalue of square matrix A and power series of square matrix A,this article has given a series of criteria of the absolute convergence and divergence of the square matrix power series.

Key words:matrix power series;spectral radius;matrix norm;characteristic value;absolute convergence

责任编辑:李翠薇