文章编号:1672 - 058X(2012)06 - 0030 - 06

求解一类随机规划的 Monte Carlo 模拟方法

贺 冲

(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘 要:通过对目标函数和约束函数同时抽样,提出了基于 Monte Carlo 模拟的遗传算法,通过逐步增加样本容量和遗传进化代数以得到满足精度要求的近似最优解,并且通过统计方法讨论样本容量的迭代终止条件,以减少 Monte Carlo 随机模拟的盲目性;同时给出了最优解的表达形式以及算法的迭代终止条件;数值实验证明了方法的有效性。

关键词:随机规划;Monte Carlo 模拟;统计方法;区间估计

中图分类号:O415 **文献标志码**: A

0 引 言

考虑如下一类随机规划的求解问题[1]:

$$(\mathrm{P})\ \begin{cases}\min & F(x) = E[f(x,\xi)] \\ \text{s.t.} & G(x) = E[g(x,\xi)] \leqslant 0\end{cases} \tag{1}$$

式(1)中:$x \in X \subseteq R^n$ 为 n 维决策变量,$f(x,\xi): X \times \Omega \to R$ 为目标函数,$g(x,\xi): X \times \Omega \to R$ 为约束函数,ξ 是概率空间(Ω,Σ,p)上的一个 d 维连续型随机变量,E 是关于 ξ 的数学期望算子。

在许多实际决策问题中常常会遇到一些不可忽略的随机不确定因素,从而产生一个随机规划模型。由于随机变量 ξ 的高维性使得不可能直接由式(1)计算数学期望值,而常采用基于 Monte Carlo[2] 随机模拟的近似求解方法,通过随机抽样将问题转化为样本平均值近似问题,然后采用确定性优化算法来求解[3,4]。其中,如何选择样本容量关系到求解的准确性。若选择的容量数太小,由于约束及目标变异太大出现误导搜索方向而找不到最优解,有时为了取得较高的精度,而在迭代过程中采用固定的大样本容量,然而太大的容量又导致计算时间过长而不可行,而且对于采用固定的大样本容量,也只能保证收敛到最优点的附近[5]。为了解决这个问题,利用遗传算法[6](Genetic Algorithm)不过多依赖目标函数性质,适合于全局搜索,且具有很好的鲁棒性,特别适应于高维决策问题等优点。在此提出基于 Monte Carlo 模拟的遗传算法来求解这类问题,通过动态的逐步增加样本容量和遗传进化代数来求解样本平均值近似问题,并在一定的容许误差限下给出样本容量 N 的迭代终止条件,以减少 Monte Carlo 随机模拟的盲目性。同时给出最优解的表达形式以及算法的迭代终止条件。

收稿日期:2011 - 09 - 19;**修回日期**:2011 - 10 - 24.

作者简介:贺冲(1987-),男,湖北仙桃人,硕士研究生,从事计算数学研究.

1　基于 Monte Carlo 模拟的遗传算法

利用 Monte Carlo 随机模拟方法,对式(1)的目标函数和约束函数同时抽样,构造的样本平均值近似(Sample Average Approximation)问题[7]为

$$(P_k)\begin{cases}\min \quad \tilde{F}_k(x) = \dfrac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k} f(x,\xi^{(i)}) \\ \text{s.t.} \quad \tilde{G}_k(x) = \dfrac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k} g(x,\xi^{(i)}) \leqslant 0\end{cases} \tag{2}$$

式(2)中 $\xi^{(i)}(i=1,2,\cdots,N_k)$ 为在第 k 次抽样中产生的 N_k 个独立抽样。

则由大数定律[8]可得 $\tilde{F}_k(x)\to F(x)\,w.p.1\quad(N_k\to\infty)$,$\tilde{G}_k(x)\to G(x)\,w.p.1\quad(N_k\to\infty)$,其中 $w.p.1$ 表示以概率 1 收敛。即 $\tilde{F}_k(x)$ 和 $\tilde{G}_k(x)$ 分别是 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的无偏一致估计。

则由中心极限定理[8]可得:$N_k^{\frac{1}{2}}[\tilde{F}_k(x)-F(x)]\Rightarrow N(0,\sigma_1^2(x))$,$N_k^{\frac{1}{2}}[\tilde{G}_k(x)-G(x)]\Rightarrow N(0,\sigma_2^2(x))$,其中,$N(0,\sigma_i^2(x))(i=1,2)$ 为标准正态分布,$\Rightarrow$ 表示以分布收敛 且 $\sigma_1^2(x):=Var[f(x,\xi)]$,$\sigma_2^2(x):=Var[g(x,\xi)]$,则 $F(x)$ 和 $G(x)$ 在置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计分别为:$\left[\tilde{F}_k(x)-\dfrac{u_\alpha\tilde{\sigma}_1(x)}{\sqrt{N_k}},\tilde{F}_k(x)+\dfrac{u_\alpha\tilde{\sigma}_1(x)}{\sqrt{N_k}}\right]$,$\left[\tilde{G}_k(x)-\dfrac{u_\alpha\tilde{\sigma}_2(x)}{\sqrt{N_k}},\tilde{G}_k(x)+\dfrac{u_\alpha\tilde{\sigma}_2(x)}{\sqrt{N_k}}\right]$,其中 u_α 为标准正态分布在置信水平 $1-\alpha$ 下的临界值。且 $\tilde{\sigma}_1^2(x):=\dfrac{1}{N_k-1}\sum_{i=1}^{N_k}[f(x,\xi^{(i)})-\tilde{F}_k(x)]^2$,$\tilde{\sigma}_2^2(x):=\dfrac{1}{N_k-1}\sum_{i=1}^{N_k}[g(x,\xi^{(i)})-\tilde{G}_k(x)]^2$。目标函数和约束函数的误差精度分别为 $\varepsilon_i=\dfrac{u_\alpha\tilde{\sigma}_i(x)}{\sqrt{N_k}}$,$i=1,2$,不妨分别取定目标函数和约束函数的容许误差限 δ_1 和 δ_2,若 $\varepsilon_i\leqslant\delta_i$,$i=1,2$,即

$$\sqrt{N_K}\geqslant\max\left(\frac{u_\alpha\tilde{\sigma}_1(x)}{\delta_1},\frac{u_a\tilde{\sigma}_2(x)}{\delta_2}\right) \tag{3}$$

则此时可认为在第 k 次抽样以后样本容量已经达到足够大,可以停止迭代样本容量。若不满足迭代终止条件式(3),则继续增加样本容量进行第 $k+1$ 次抽样。

当样本容量 N_k 和随机样本 $\xi^{(i)}$ 固定时,式(2)为确定性数学规划问题,在此使用遗传算法来求近似解。迭代过程采用独立抽样方法逐步增加样本容量和遗传算法的进化代数,可使得式(2)所得解逐渐逼近原问题的最优解。当 N_k 足够大时,则式(2)所得解可以近似为原问题的最优解。

下面给出原问题近似最优解的表达式和迭代终止条件。记在第 k 次抽样后,求解样本平均值近似问题所得的近似解:

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$$

则原问题的最优解的估计值 $\tilde{x}^{(k)}=(\tilde{x}_1^{(k)},\tilde{x}_2^{(k)},\cdots,\tilde{x}_n^{(k)})$ 可表示如下:

$$\tilde{x}_j^{(k)}=\frac{\sum_{t=1}^{k}N_t x_j^{(t)}}{\sum_{t=1}^{k}N_t},(j=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

即 $\tilde{x}^{(k)}$ 为前 k 次求解样本平均值近似问题所得近似解 $x^{(t)}(t=1,2,\cdots,k)$ 的加权平均值。

则 $\tilde{x}_j^{(k)}$ 方差的估计值:

$$\tilde{\sigma}_3^2(\tilde{x}_j^{(k)}) = \frac{\sum_{t=1}^{k} N_t (x_j^{(t)} - \tilde{x}_j^{(k)})^2}{(k-1)\sum_{t=1}^{k} N_t}, (j = 1,2,\cdots,n)$$

此时可认为 $\tilde{x}^{(k)}$ 为原规划问题的最优解,且迭代终止。如果 $\tilde{x}^{(k)}$ 满足如下条件:

(a) 约束函数的上置信限满足约束条件:

$$\tilde{G}_k(\tilde{x}^{(k)}) + \frac{u_\alpha \tilde{\sigma}_2(\tilde{x}^{(k)})}{\sqrt{N_k}} \leqslant 0 \tag{5}$$

(b) 样本容量 N_k 满足迭代终止条件:

$$\sqrt{N_k} \geqslant \max\left(\frac{u_\alpha \tilde{\sigma}_1(\tilde{x}^{(k)})}{\delta_1}, \frac{u_a \tilde{\sigma}_2(\tilde{x}^{(k)})}{\delta_2}\right) \tag{6}$$

(c) 最优解的方差估计不超过容许误差限:

$$\varepsilon_3 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\tilde{\sigma}_3(\tilde{x}_j^{(k)})| < \delta_3 \tag{7}$$

其中取定容许误差限 δ_i 为正常量。

综上所述,求解问题(P)的算法可描述如下:

(1) 初始化。置 $k=1$,取定显著性水平 α,选择相应的样本容量 N_k,遗传算法的进化代数 I_k 和容许误差限 $\delta_i > 0$,取定数列 $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty} \to \infty$;

(2) 通过 Monte Carlo 模拟方法产生 N_k 个独立的随机样本 $\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(N_k)}$;

(3) 采用遗传算法来求解样本平均值近似问题,得到近似解 $x^{(k)}$;

(4) 按式(4)计算原问题的最优解的近似值 $\tilde{x}^{(k)}$;

(5) 检查终止条件式(5)、式(6)、式(7);若都满足,则迭代终止并输出最优解 $\tilde{x}^{(k)}$;否则,置 $N_{k+1} = \tau_k N_k$;$I_{k+1} = \tau_k I_k$;$k = k+1$,然后转步骤(2)。

在上述算法中针对样本平均值近似问题并不需要每次迭代都精确求解,只需求出近似值即可。随着样本容量和进化代数的逐步增大,逐步精确化求解,这样有助于提高计算速度。

2 收敛性

引理 1 令 $l(x,\lambda,\xi) = f(x,\xi) + \lambda g(x,\xi)$,取原问题和样本近似问题的拉格朗日函数分别为 $L(x,\lambda) = F(x) + \lambda G(x) = E[l(x,\lambda,\xi)]$,$\tilde{L}_k(x,\lambda) = \tilde{F}_k(x) + \lambda \tilde{G}_k(x)$,假设 $f(x,\xi)$ 和 $g(x,\xi)$ 对于每个 ξ,关于 x 凸,则 $\lim\limits_{k\to\infty} \nabla \tilde{L}_k(x,\lambda) = \nabla L(x,\lambda)$.

证明 由于对于每一个 ξ,$f(x,\xi)$ 和 $g(x,\xi)$ 关于 x 凸,易知 $F(x)$ 和 $G(x)$ 关于 x 凸,取 $\eta_t(\xi) = t^{-1}[l(x + th,\lambda,\xi) - l(x,\lambda,\xi)]$,其中方向向量 $h \in R^n$

则
$$\frac{\partial}{\partial x} L(x,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x} El(x,\lambda,\xi) = \lim_{t\to 0} t^{-1}[El(x+th,\lambda,\xi) - El(x,\lambda,\xi)] =$$

$$\lim_{t\to 0} E(\eta_t(\xi)) = E \lim_{t\to 0} \eta_t(\xi) = E \frac{\partial}{\partial x} l(x,\lambda,\xi)$$

即
$$\nabla L(x,\lambda) = \nabla El(x,\lambda,\xi) = E[\nabla l(x,\lambda,\xi)]$$

又因为

$$\lim_{k\to\infty}\nabla\tilde{L}_k(x,\lambda)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\nabla l(x,\lambda,\xi^{(i)})=E[\nabla l(x,\lambda,\xi)]\quad w.p.1$$

即
$$\lim_{k\to\infty}\nabla\tilde{L}_k(x,\lambda)=\nabla L(x,\lambda)\quad w.p.1$$

引理 2　假设 S_k 为第 k 次抽样后样本平均值近似问题的可行解，S 为原问题的可行解。则 $S_k\subset S$ 且 $\lim\limits_{N_k\to\infty}S_k=S\quad w.p.1$

证明　因为 $\tilde{G}_k(x)\to G(x)\quad w.p.1\quad (N_k\to\infty)$，可得在置信水平 $1-\alpha$ 下

$$|G(x)-\tilde{G}_k(x)|\leqslant\frac{u_\alpha\tilde{\sigma}_2(x)}{\sqrt{N_k}}$$

即
$$\tilde{G}_k(x)-\frac{u_\alpha\tilde{\sigma}_2(x)}{\sqrt{N_k}}\leqslant G(x)\leqslant\tilde{G}_k(x)+\frac{u_\alpha\tilde{\sigma}_2(x)}{\sqrt{N_k}}$$

对于 $\forall x^{(k)}\in S_k$，则不妨假设 $\max\limits_{k\geqslant1}\tilde{G}_k(x^{(k)})=a\leqslant0$，则

$$G(x^{(k)})\leqslant a+\frac{u_\alpha\tilde{\sigma}_2(x^{(k)})}{\sqrt{N_k}}$$

则必存在 N_{k^*}，当 $N_k\geqslant N_{k^*}$ 时

$$G(x^{(k)})\leqslant a+\frac{u_\alpha\tilde{\sigma}_2(x^{(k)})}{\sqrt{N_k}}<0$$

即 $x^{(k)}\in S$，亦即 $S_k\subset S\quad w.p.1\quad (N_k\to\infty)$，同理对于 $\forall x\in S$ 可证 $S\subset S_k\quad w.p.1\quad (N_k\to\infty)$，即

$$\lim_{N_k\to\infty}S_k=S\quad w.p.1$$

定理　假设 $f(x,\xi)$，$g(x,\xi)$ 在 $X\times\Omega$ 上有界连续，且对于每个 ξ，关于 x 凸，其中 X 为紧凸集，则样本平均值近似问题 (P_k) 的任意最优解序列必收敛于原问题 (P) 的某一个最优解。

证明　设 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 为样本平均值近似问题 (P_k) 的一组最优解序列。取 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 的任意收敛子列 $\{x^{(k_i)}\}$，且 $\lim\limits_{i\to\infty}x^{(k_i)}=x^*$。

因为 $\{x^{(k_i)}\}$ 为样本平均值近似问题 (P_k) 的最优解，则

$$\nabla\tilde{L}_{k_i}(x^{(k_i)},\lambda)^{\mathrm{T}}(x-x^{(k_i)})\geqslant0,\quad\forall x\in S_{k_i}$$
$$\lim_{i\to\infty}\nabla\tilde{L}_{k_i}(x^{(k_i)},\lambda)^{\mathrm{T}}(x-x^{(k_i)})\geqslant0,\quad\forall x\in S_{k_i}$$

由引理 1 可得

$$\lim_{i\to\infty}\nabla\tilde{L}_{k_i}(x^{(k_i)},\lambda)^{\mathrm{T}}(x-x^{(k_i)})=\lim_{i\to\infty}\nabla\tilde{L}_{k_i}(x^{(k_i)},\lambda)^{\mathrm{T}}\lim_{i\to\infty}(x-x^{(k_i)})=\nabla L(x^*,\lambda)^{\mathrm{T}}(x-x^*)$$

由引理 2 可知，$x\in S$，$x^*\in S$，即对于 $x^*\in S$，$\nabla L(x^*,\lambda)^{\mathrm{T}}(x-x^*)\geqslant0,\quad\forall x\in S$，即 x^* 为原问题 (P) 的最优解，则命题得证。

3　算　例

考虑如下随机期望值规划[1]：

$$\begin{cases}\min E[\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}]\\ \text{s.t.}\quad E(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\xi_4^2-11)\leqslant0\end{cases}$$

其中，ξ_1 服从均匀分布 $U(1,2)$，ξ_2 服从正态分布 $N(3,1)$，ξ_3 服从指数分布 $EXP(3)$，ξ_4 服从均匀分布 $U(1,2)$。

在此采用 matlab 7.10 进行数值试验。按如下规律逐渐增加 Monte Carlo 抽样样本容量 N_k:取定 $N_1=2$,并令 $N_k=2N_{k-1}(k\geqslant 2)$。对于求解样本平均值近似问题采用遗传算法(Genetic Algorithm)进行求解。并按如下规律逐步增加遗传算法的进化代数 I_k,取定 $I_1=50$,并令 $I_k=I_{k-1}+50(k\geqslant 2)$,随着迭代次数的增加逐步精确求解,这有助于提高计算速度。在采用遗传算法计算样本平均值近似问题时所使用的参数是:种群规模大小为 30,交叉概率为 0.2,变异概率为 0.5。取定容许误差限 $\delta_1=\delta_2=0.01$,$\delta_3=0.005$,显著性水平 $\alpha=0.05$。实际计算过程在第 15 次迭代后停止,表 1 列出了第 1,2,5,8,11,14 和 15 次迭代后所输出的 $\tilde{x}^{(k)}$,$\tilde{F}_k(\tilde{x}^{(k)})$,$\sqrt{N_k}$,$\max\left(\frac{u_\alpha\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1(\tilde{x}^{(k)})}{\delta_1},\frac{u_a\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2(\tilde{x}^{(k)})}{\delta_2}\right)$,$\varepsilon_3$ 和 $\tilde{G}_k(\tilde{x}^{(k)})+\varepsilon_2$ 的计算结果。其中,第 1 次迭代 ε_3 没有结果,用#表示。不妨取 $\Delta_1=\max\left(\frac{u_\alpha\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1(x)}{\delta_1},\frac{u_a\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2(x)}{\delta_2}\right)$,$\Delta_2=\tilde{G}_k(\tilde{x}^{(k)})+\varepsilon_2$。

表 1 迭代过程中的部分输出结果

K	$\tilde{x}^{(k)}$	$\tilde{F}_k(x)$	$\sqrt{N_k}$	Δ_1	ε_3	Δ_2
1	(0.657 1,2.687 3,1.543 5)	3.721 8	1.414 2	562.34	#	13.434 1
2	(0.805 6,2.472 2,1.540 9)	3.686 7	2.000 0	287.45	0.163 3	10.873 2
5	(1.123 4,2.267 1,1.835 6)	3.307 3	5.656 8	198.78	0.082 3	10.897 9
8	(1.117 3,2.303 4,1.856 3)	3.228 4	16.000	250.63	0.025 8	10.943 6
11	(1.180 4,2.350 3,1.805 2)	3.174 1	45.254	100.24	0.004 5	10.902 5
14	(1.195 1,2.345 3,1.739 2)	3.153 2	128.00	89.673	0.004 2	10.896 6
15	(1.196 3,2.346 7,1.741 4)	3.152 9	181.02	80.381	0.004 0	10.820 5

在实际计算过程中在第 14 次迭代后,所得最优解的估计值已满足算法迭代终止,因此可以将第 14 和第 15 次迭代后的结果平均值作为最优解。即可将(1.195 7,2.346 0,1.740 3)作为原式的最优解。

4 结 论

期望值模型是随机优化问题中常见的且有效的方法,广泛运用于期望费用极小,期望效益极大化等问题。由于一般不能将其转化为确定性问题,基于 Monte Carlo 随机模拟方法求解由其所对应的样本平均值近似问题是目前求解的普遍方法,但样本容量选取的盲目性很容易导致计算量很大或计算失效。在此提出的基于 Monte Carlo 模拟的遗传算法本质上属于动态搜索方法,通过动态的增加样本容量和遗传算法的迭代次数来求解样本近似问题,并逐步分别检验样本容量和最优解迭代终止条件,以从而得到近似精确解。最后数值实验表明了该方法的可行性和有效性。

参考文献:

[1] 刘宝碇,赵瑞清. 随机规划与模糊规划[M]. 北京:清华大学出版社,1998

[2] FISHMAN G S. Monte Carlo:concepts,algorithms and applications[M]. New York:Springer Verlag,1995

[3] ZHANG M J. Solving a class of Convex Stochastic Programs via Monte Carlo Simulation[J]. Operations Research Transactions,2009,13(2):25-32

[4] SAKALUSKAS L L. Nonlinear stochastic programming by Monte-Carlo estimators[J]. European Journal of Operational Research, 2002,137:558-573

[5] SAKALUSKAS L L. A centering by the Monte-Carlo method[J]. Stochastic Analysis and Applications,1997,4(15):32-45

[6] 李敏强. 遗传算法的基本理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2004

[7] SHAPIRO A. Monte carlo simulation approach to stochastic programming[C]. Proce-edings of the 2001 Winter Simulation Conference,2001:428-431

[8] SHAPIRO A. Asymptotic properties of statistical estimation in stochastic program-Ming[J]. The annals of statistics,1989,17(2): 841-858

Monte Carlo Simulation for Solving a Class of Stochastic Programming

HE Chong

(College of Mathematics and Statistics,Chongqing University,Chongqing 401331,China)

Abstract: The Genetic Algorithm based on Monte Carlo simulation by sampling both of objective and constraint functions is presented for solving a class of stochastic programming. We can get the approximate optimal solution satisfying the requirement of accuracy through gradually increasing sample size and genetic evolutionary generations, discuss stopping criterion for iteration of the sample size to reduce the blindness of Monte Carlo stochastic simulation by statistical method, and give stopping criterion for iteration of the algorithm and the expressions of optimal solution. Numerical example is employed to demonstrate the effectiveness of the presented algorithm.

Key words: stochastic programming;Monte Carlo simulation;statistical method;interval estimation

责任编辑:代小红