文章编号:1672 - 058X(2012)06 - 0001 - 03

短尾对称分布的逐点收敛速度*

刘 豹,付 颖
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘 要:短尾对称分布有着广泛的应用,Lin 和 Peng(2010)研究了短尾对称分布尾部特征.主要对短尾对称分布的逐点收敛速度进行了研究,得出在特定条件下,最大值的收敛速度为 $\Delta_n(x) \sim \Lambda(x)\dfrac{e^{-x}}{z\log n}$.

关键词:短尾对称分布;最大值;收敛速度
中图分类号:O211.4 **文献标志码**: A

0 引 言

Tiku 和 Vaughan 在 1999 年给出了短尾对称分布(STSD)的分布函数,其密度函数定义如下:

$$f(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 + \frac{\lambda}{2r}x^2\right\}^r e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1}$$

其中 $r>0,\lambda = r/(r-a),a<r$,且

$$C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 + \frac{\lambda}{2r}x^2\right\}^r e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

蔺富明和彭作祥在 2010 年给出了 STSD 的尾部 $1-F(x)$ 与密度函数 $f(x)$ 之间的关系式:

$$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\frac{f(x)}{x} < 1 - F(x) < \left(1 - \frac{2r\lambda}{2r+\lambda x^2}\right)^{-1}\frac{f(x)}{x} \tag{2}$$

对所有满足 $x^2 > 2a \vee 0$ 的 $x>0$ 均成立.

为了得到文章主要结论,引入一些重要的引理.

1 重要的引理

Ling 和 Peng[1] 给出了同服从短尾对称分布独立随机变量的最大值的极值分布定理,在此处引来作为一个引理并用另外一种方法给出证明.

引理 1 设 $\{x_n, n\geqslant 1\}$ 是同服从短尾对称分布(STSD)的独立随机变量,令 $M_n = \max\{x_k, 1\leqslant k\leqslant n\}$,有

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n \leqslant u_n) = \exp\{-e^{-x}\} =: \Lambda(x) \tag{3}$$

收稿日期:2011 - 12 - 05;**修回日期**:2012 - 01 - 13.
* **基金项目**:国家自然科学基金(11171275)资助项目.

作者简介:刘豹(1986-),男,安徽宿州人,硕士研究生,从事极值理论的研究.

其中 $a_n=\frac{1}{(2\log n)^{\frac{1}{2}}}$, $b_n=(2\log n)^{\frac{1}{2}}+\frac{r\log\left(\frac{\lambda}{2r}\right)+\frac{2r-1}{2}\log(2\log n)+\log\left(\frac{C}{\sqrt{2\pi}}\right)}{(2\log n)^{\frac{1}{2}}}$.

证明 由式(1)(2)可知,当 $x\to\infty$ 时,

$$1-F(x)\sim\frac{C}{\sqrt{2\pi}x}\left\{1+\frac{\lambda}{2r}x^2\right\}^r e^{-\frac{x^2}{2}}$$

也即

$$1-F(x)=\frac{C_1}{\sqrt{2\pi}x}\left\{1+\frac{\lambda}{2r}x^2\right\}^r e^{-\frac{x^2}{2}}$$

其中 $C_1=C(1+o(1))$.

由于$\frac{1-F(x)}{F'(x)}=\frac{C_1}{Cx}$,不妨设附属函数 $a(t)=\frac{1}{t}$,则对 $t\to\infty$ 时,有

$$\frac{1-F(t+x(a(t)))}{1-F(t)}=\frac{\frac{C}{\sqrt{2\pi}\left(t+\frac{x}{t}\right)}\exp\left\{-\frac{\left(t+\frac{x}{t}\right)^2}{2}\right\}\left\{1+\frac{\lambda}{2r}\left(t+\frac{x}{t}\right)^2\right\}^r}{\frac{C}{\sqrt{2\pi}t}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\left\{1+\frac{\lambda}{2r}t^2\right\}^r}\to\exp\{-x\}$$

因此由 Leaderbetter 等[2]定理可以得到 $F(x)\in D(\Lambda)$.

下面确定规范常数.

由于 $1-F(x)$ 满足冯米泽斯条件,所以由 $b_n=\left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(n)$ 和 $a_n=f(b_n)$ 经过计算即可得规范化常数,在此不一一赘述. 为了证明主要结果也需要以下两个定理,Leaderbetter[2]中的定理 1.51 和 1.42.

引理 2 令 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布序列且 $\{u_n\}$ 是一实数序列,满足 $n\to\infty$ 时,$P(M_n\leqslant u_n)\to e^{-\tau}$,记 $\tau=e^{-x}$,则 $\lim_{n\to\infty}n(1-F(u_n))=\tau$.

引理 3 令 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布序列且 $\tau_n=n(1-F(u_n))$. 记 $\Delta_n=\left(1-\frac{\tau_n}{n}\right)^n-e^{-\tau_n}$,$\Delta'_n=e^{-\tau_n}-e^{-\tau}$,从而 $P(M_n\leqslant u_n)-e^{-\tau}=\Delta_n+\Delta'_n$. 则当 $\tau_n\to\tau$ 时,$\Delta_n\sim-\frac{\tau^2e^{-\tau}}{2n}$.

2 主要结果

定理 1 在引理 1 的条件下,令 $\Delta_n(x)=P(M_n\leqslant u_n)-\exp\{-e^{-x}\}$,则当 $n\to\infty$ 时,最大值 M_n 的收敛速度为 $\Delta_n(x)\sim\Lambda(x)\frac{e^{-x}}{2\log n}$.

证明 令 $\tau_n=n(1-F(u_n))$,$\tau=e^{-x}$,$u_n=a_nx+b_n$,$a_nb_n=1$.

由式(1)得

$$\tau_n=n(1-F(u_n))=$$

$$\frac{n}{u_n}f(u_n)(1+O(u_n^2))^{-1}=$$

$$\frac{nC}{\sqrt{2\pi}b_n}\{1+\frac{\lambda}{2r}b_n^2\}^r e^{-\frac{b_n^2}{2}}\frac{1}{1+\frac{a_nx}{b}}\exp\left\{-\frac{a_n^2x^2+2a_nb_nx}{2}\right\}\left\{1+\frac{\lambda}{2r}u_n^2\right\}^r\left\{1+\frac{\lambda}{2r}b_n^2\right\}^{-r}(1+O(u_n^2))^{-1}=$$

$$e^{-x}(1-a_n^2x+O(a_n^4))\left(1-\frac{a_n^2x^2}{2}+O(a_n^4))(1+o(1)\right)=$$

$$e^{-x}\left(1-a_n^2x\left(1+\frac{x}{2}\right)+O(a_n^4)\right)(1+o(1))$$

而

$$e^{-\tau_n}-e^{-\tau}=\exp\left\{-e^{-x}\left(1-a_n^2x\left(1+\frac{x}{2}\right)+O(a_n^4)\right)(1+o(1))\right\}-\exp\{-e^{-x}\}=$$

$$\exp\left\{-e^{-x}\left(a_n^2x\left(1+\frac{x}{2}\right)+O(a_n^4)\right)(1+o(1))\right\} \tag{4}$$

又因为

$$\Delta_n(x)=P(M_n\leqslant u_n)-\exp\{-e^{-x}\}=P(M_n\leqslant u_n)-e^{-\tau_n}+e^{-\tau_n}-e^{-\tau} \tag{5}$$

利用式(4)(5)及引理3,结论成立.

参考文献:

[1] LIN F,PENG Z. Tail behavior and extremes of short-tailed symmetric distribution [R]. Communications in Statistics-Theory and Methods,2010,39:2811-2817

[2] LEADBETTER M R,LINDGREN G,ROOTZ H. Extremes and related properties of random sequences and processes [M]. Springer-Verlag,New York,1983

[3] RESNICK S I. Extreme values,regular variation,and point processes [M]. Springer-Verlag,New York,1987

[4] XIONG F,PENG Z X. The rate of convergence of extremes for the Erlang distribution [J]. Journal of Southwest University: Natural Science,2010,33(3):5-8

[5] LIN F,ZHANG X,PENG Z,et al. On the rate of STSD extremes [J]. Communications in Statistics-Theory and methods,2011,40:1795-1806

The Point-wise Rate of Convergence for Short-tailed Symmetric Distribution

LIU Bao,FU Ying

(School of Mathematics and Statistics,Southwest University,

Chongqing 400715,China)

Abstract: The distribution of short-tailed symmetric distribution (STSD) has been widely used in various fields,the tail feature of STSD has been studied by Lin and Peng in 2010. In this article,the point-wise convergence rate of STSD distribution is studied and we obtain that, in a special condition, the convergence rate of maximal value is $\Delta_n(x)\sim\Lambda(x)\frac{e^x}{z\log n}$.

Key words: short-tailed symmetric distributions; maximum; rate of convergence

责任编辑:李翠薇