文章编号:1672 - 058X(2012)05 - 0018 - 06

广义(F,α,ρ,θ)-V-凸多目标分式规划的半参数充分有效性条件

江 维 琼
(重庆工商大学 融智学院基础部,重庆 400033)

摘　要:在各种广义(F,α,ρ,θ)-V-凸性假设下给出了多目标分式子集规划问题的一个相当大的半参数的充分有效性条件.

关键词:(F,α,ρ,θ)-V-凸;半参数;有效性条件
中图分类号:O241　　**文献标志码**:A

在各种广义(F,α,ρ,θ)-V-凸性假设下为下面的多目标分式子集规划问题(P)介绍一个相当大的半参数的充分有效性条件. 问题(P)如下:

$$\text{Minimize}:\left(\frac{F_1(S)}{G_1(S)},\frac{F_2(S)}{G_2(S)},\cdots,\frac{F_P(S)}{G_P(S)}\right)\quad \text{s. t.}\quad H_j(S)\leqslant 0, j\in \bar{q}, S\in A^n \tag{P}$$

这里 A^n 是 σ - 代数 A 的 n 次乘积,$A\subset X$,F_i,G_i,$i\in \underline{p}$,$\underline{p}=\{1,2,\cdots,p\}$,$H_j$,$j\in \underline{q}$是定义在 A^n 上的实值函数,且对每个 $i\in \underline{p}$,$G_i(S)>0$,对所有的 $S\in A^n$ 使得 $H_j(S)\leqslant 0$,$j\in \underline{q}$.

众所周知,与问题(P)相似的点函数在数学规划领域是作为多目标分式规划问题来处理的. 这些问题在过去几年中已经被关注过,已有许多的结果被发表出来. 对于更多的关于广义点函数的多目标问题,如果有兴趣可以参考最近出版的 Miettinen 的专著[1],此处将给出问题(P)的一个相当大的半参数的充分有效性条件.

1　预备知识

下面有对于向量不等式规定一致的记法. 对所有的 $a,b\in R^m$,作如下的规定:

$a\geqslant b\Leftrightarrow a_i\geqslant b_i, i\in \underline{m}$;$a\geqslant b\Leftrightarrow a_i\geqslant b_i, i\in \underline{m}$且 $a\neq b$;$a>b\Leftrightarrow a_i>b_i, i\in \underline{m}$;$a\ngeq b$ 是 $a\geqslant b$ 的否定.

$S^*\in F$ 是问题(P)的有效性解,如果没有 $S\in F$,使得

$$(F_1(S)/G_1(S),\cdots,F_p(S)/G_p(S))\leqslant(F_1(S^*)/G_1(S^*),\cdots,F_p(S^*)/G_p(S^*))$$

为了导出问题(P)的必要性条件集,通过下面的辅助参数问题间接的使用 Dinkelbanch-type[2]:

$$\text{Min}_{S\in F}(F_1(S)-\lambda_1 G_1(S),\cdots,F_p(S)-\lambda_p G_p(S))\qquad (P_\lambda)$$

这里 λ_i,$i\in \underline{p}$是参数,如果选择特殊的参数 λ_i,$i\in \underline{p}$,则这个问题和问题(P)是等价的,于是这两个问题有同样的有效解集. 这个等价性的论述正好在下面的引理中被直接的证明了.

收稿日期:2011 - 09 - 27;**修回日期**:2011 - 11 - 22.
作者简介:江维琼(1978-),女,土家族,重庆石柱人,讲师,从事最优化理论与应用研究.

引理 1　$S^* \in F$ 是问题(P)的一个有效解当且仅当如果 $S^* \in F$ 是(P_λ^*)的有效解,其中 $\lambda_i^* = F_i(S^*)/G_i(S^*)$,$i \in \underline{p}$.

2　半参数充分有效性条件

在此介绍了在各种广义(F,α,ρ,θ)-V-凸性假设下问题(P)的半参数充分有效性条件. 下面先介绍一些附加的符号. 对 A^n 上的 λ,u 和 v 是用如下方式确定的:

$$A_i(S,\lambda,u) = u_i[F_i(S) - \lambda_i G_i(S)],i \in \underline{p},B_j(S,v) = v_j H_j(S),j \in \underline{q}$$

而 $C_i(\cdot,S^*,u^*)$和 $A_i(\cdot,S^*,u^*,v^*)$定义如下:固定 A^n 上的 S^*,u^*,v^*,则:

$$C_i(S,S^*,u^*) = u_i^*[G_i(S^*)F_i(S) - F_i(S^*)G_i(S)]$$

$$A_i(S,S^*,u^*,v^*) = u_i^*[G_i(S^*)F_i(S) - F_i(S^*)G_i(S)] + \sum_{j\in J_0} v_j^* H_j(S),i \in \underline{p}$$

定理 1　令 $S^* \in F$,假定 F_i,G_i,$i \in \underline{p}$和 H_j,$j \in \underline{q}$在 S^* 可微,并且存在 $u^* \in U$,$v^* \in R_+^q$,使得

$$F(S,S^*;\sum_{i=1}^{p} u_i^*[G_i(S^*)DF_i(S^*) - F_i(S^*)DG_i(S^*)] + \sum_{j=1}^{q} v_j^* DH_j(S^*)) \geqslant 0,S \in A^n \tag{1}$$

$$v_j^* H_j(S^*) = 0,j \in \underline{q} \tag{2}$$

其中,$F(S,S^*;\cdot):L_1^n(X,A,\mu)\to R$ 是次线性函数. 进一步假设下面的 4 个假定满足其中任何一个:

(a) (i) 对每个 $i \in \underline{p}$,$F_i(S^*)\geqslant 0$ 和$(F_1,\cdots,F_p)$在 S^* 是$(F,\alpha,\bar{\rho},\theta)$-$V$-凸.

(ii) $(-G_1,\cdots,-G_p)$在 S^* 是$(F,\beta,\hat{\rho},\theta)$-$V$-凸.

(iii) $(H_1,\cdots,H_q)$在 S^* 是$(F,\gamma,\tilde{\rho},\theta)$-$V$-凸.

(iv) $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \cdots\beta_p = \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots\gamma_q = \delta$.

(v) $\sum_{i=1}^{p} u_i^*[G_i(S^*)\bar{\rho}_i + F_i(S^*)\hat{\rho}_i] + \sum_{j=1}^{q} v_j^* \tilde{\rho}_j \geqslant 0$.

(b) (i) $(C_1(\cdot,S^*,u^*),\cdots,C_p(\cdot,S^*,u^*))$在 S^* 是$(F,\alpha,\bar{\rho},\theta)$-$V$-伪凸.

(ii) $(B_1(\cdot,v^*),\cdots,B_q(\cdot,v^*))$在 S^* 是$(F,\beta,\tilde{\rho},\theta)$-$V$-拟凸.

(iii) $\bar{\rho} + \tilde{\rho} \geqslant 0$.

(c) (i) (b)(ii)成立.

(ii) $(C_1(\cdot,S^*,u^*),\cdots,C_p(\cdot,S^*,u^*))$在 S^* 是预严格$(F,\alpha,\bar{\rho},\theta)$-$V$-拟凸.

(iii) $\bar{\rho} + \tilde{\rho} > 0$.

(d) (i) (c)(ii)成立.

(ii) $(B_1(\cdot,v^*),\cdots,B_q(\cdot,v^*))$在 S^* 是严格$(F,\alpha,\tilde{\rho},\theta)$-$V$-伪凸.

(iii) $\bar{\rho} + \tilde{\rho} \geqslant 0$.

则 S^* 是问题(P)的有效解.

证明　令 S 是问题(P)的任意一个有效解,

(**a**) 由 $F(S,S^*;\cdot)$的次线性和式(1)有:

$$F(S,S^*;\sum_{i=1}^{p} u_i^*[G_i(S^*)DF_i(S^*) - F_i(S^*)DG_i(S^*)]) + F(S,S^*;\sum_{j=1}^{q} v_j^* DH_j(S^*)) \geqslant 0 \tag{3}$$

又由于 $u^* > 0$,$v^* \geqslant 0$,$F_i(S^*)\geqslant 0$ 和 $G_i(S^*) > 0$,$i \in \underline{p}$,有:

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* [G_i(S^*)F_i(S) - F_i(S^*)G_i(S)] =$$

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* \{G_i(S^*)[F_i(S) - F_i(S^*)] - F_i(S^*)[G_i(S) - G_i(S^*)]\} \geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* G_i(S^*)[F(S,S^*;\delta(S,S^*)DF_i(S^*) + \bar{\rho}_i d^2(\theta(S,S^*))] +$$

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* F_i(S^*)[F(S,S^*;-\delta(S,S^*)DG_i(S^*) + \hat{\rho}_i d^2(\theta(S,S^*))]$$

由条件(a)的(i)(ii)(iv)有

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* [G_i(S^*)F_i(S) - F_i(S^*)G_i(S)] \geqslant$$

$$F(S,S^*;\sum_{i=1}^{p} u_i^* \delta(S,S^*)[G_i(S^*)DF_i(S^*) - F_i(S^*)DG_i(S^*)]) +$$

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* [G_i(S^*)\bar{\rho}_i + F_i(S^*)\hat{\rho}_i] d^2(\theta(S,S^*)$$

由 $F(S,S^*;\cdot)$ 的次线性有

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* [G_i(S^*)F_i(S) - F_i(S^*)G_i(S)] \geqslant - F(S,S^*;\sum_{j=1}^{q} v_i^* \delta(S,S^*)DH_j(S^*)) +$$
$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* [G_i(S^*)\bar{\rho}_i + F_i(S^*)\hat{\rho}_i] d^2(\theta(S,S^*)$$

由式(3)有

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* [G_i(S^*)F_i(S) - F_i(S^*)G_i(S)] \geqslant \sum_{j=1}^{q} v_i^* [H_j(S^*) - H_j(S) +$$
$$(\sum_{i=1}^{p} u_i^* [G_i(S^*)\bar{\rho}_i + F_i(S^*)\hat{\rho}_i] + \sum_{j=1}^{q} v_i^* \tilde{\rho}_j) d^2(\theta(S,S^*)$$

由条件(a)(iii)和(a)(iv)有

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* [G_i(S^*)F_i(S) - F_i(S^*)G_i(S)] \geqslant 0 \tag{4}$$

由式(2),S 的可行性和条件(a)(v),因为 $u^* > 0$,不等式(4)蕴涵了$(G_1(S^*)F_1(S) - F_1(S^*)G_1(S),\cdots,G_p(S^*)F_p(S) - F_p(S^*)G_p(S)) \nleq (0,\cdots,0)$,于是蕴涵了 $\varphi(S) \nleq \varphi(S^*)$. 由 $S \in F$ 的任意性,则 S^* 是问题(P)的有效解.

(**b**) 又由式(3)在条件(b)(ii)和条件(b)(iii) 的假设下,可以得到

$$F(S,S^*;\sum_{i=1}^{p} u_i^* [G_i(S^*)DF_i(S^*) - F_i(S^*)DG_i(S^*)]) \geqslant - \bar{\rho} d^2(\theta(S,S^*))$$

由条件(b)(i)蕴涵了

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{p} u_i^* \alpha_i(S,S^*)[G_i(S^*)F_i(S) - F_i(S^*)G_i(S)] \geqslant \\ &\sum_{i=1}^{p} u_i^* \alpha_i(S,S^*)[G_i(S^*)F_i(S^*) - F_i(S^*)G_i(S^*)] = 0\end{aligned} \tag{5}$$

因为 $u_i^* \alpha_i(S,S^*) > 0, i \in \underline{p}$,式(5)就蕴涵了$(G_1(S^*)F_1(S) - F_1(S^*)G_1(S),\cdots,G_p(S^*)F_p(S) - F_p(S^*)G_p(S)) \nleq$

$(0,\cdots,0)$,于是蕴涵了 $\varphi(S)\nleq\varphi(S^*)$,因此 S^* 是问题(P)的有效解.

(c),(d)的证明和(b)相似.

定理 2 令 $S\in F$,假设 $F_i,G_i,i\in \underline{p}$ 和 $H_j,j\in \underline{q}$ 在 S^* 可微且存在 $u^*\in U,v^*\in R_+^q$ 使得式(1)-(2)成立. 进一步假设下面的 3 个假定满足其中任何一个:

(a) (i) $(\Lambda_1(\cdot,S^*,u^*,v^*),\cdots,\Lambda_p(\cdot,S^*,u^*,v^*))$ 在 S^* 是 $(F,\alpha,\bar{\rho},\theta)$-$V$-伪凸.

(ii) $(\Delta_1(\cdot,v^*),\cdots,\Delta_m(\cdot,v^*))$ 在 S^* 是 $(F,\beta,\tilde{\rho},\theta)$-$V$-拟凸.

(iii) $\bar{\rho}+\tilde{\rho}\geqslant 0$.

(b) (i) (a)(ii) 成立.

(ii) $(\Lambda_1(\cdot,S^*,u^*,v^*),\cdots,\Lambda_p(\cdot,S^*,u^*,v^*))$ 在 S^* 是预严格 $(F,\alpha,\bar{\rho},\theta)$-$V$-拟凸.

(iii) $\bar{\rho}+\tilde{\rho}>0$.

(c) (i) (b)(ii) 成立.

(ii) $(\Delta_1(\cdot,v^*),\cdots,\Delta_m(\cdot,v^*))$ 在 S^* 是预严格 $(F,\alpha,\tilde{\rho},\theta)$-$V$-伪凸.

(iii) $\bar{\rho}+\tilde{\rho}\geqslant 0$.

则 S^* 是问题(P)的有效解.

证明 (**a**) 令 S 是问题(P)的任意一个有效解. 由(a)(ii)的假设和 $F(S,S^*;\cdot)$ 的次线性,由式(1)有下面的式子成立:

$$F(S,S^*;\sum_{i=1}^{p}u_i^*[G_i(S^*)DF_i(S^*)-F_i(S^*)DG_i(S^*)]+\sum_{j\in J_0}v_j^*DH_j(S^*))+F(S,S^*;\sum_{t=1}^{m}\sum_{j\in J_t}v_j^*DH_j(S^*))\geqslant 0 \tag{6}$$

由式(6)和条件(a)(iii)可以推得:

$$F(S,S^*;\sum_{i=1}^{p}u_i^*[G_i(S^*)DF_i(S^*)-F_i(S^*)DG_i(S^*)]+\sum_{j\in J_0}v_j^*DH_j(S^*))\geqslant-\bar{\rho}d^2(\theta(S,S^*))$$

由条件(a)(i)蕴涵了

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(S,S^*)\Lambda_i(S,S^*,u^*,v^*)\geqslant\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(S,S^*)\Lambda_i(S^*,S^*,u^*,v^*) \tag{7}$$

因为 $\Lambda_i(S^*,S^*,u^*,v^*)=0,i\in\underline{p};v_j^*H_j(S^*)\leqslant 0,j\in\underline{q}$ 和 $\alpha_i(S,S^*)>0,i\in\underline{p}$,不等式(7)简化为:

$$\sum_{i=1}^{p}u_i^*\alpha_i(S,S^*)[G_i(S^*)F_i(S)-F_i(S^*)G_i(S)]\geqslant 0$$

则 S^* 是问题(P)的有效解.

(b),(c)的证明和(a)部分相似.

令函数 $\Pi_t(\cdot,S^*,u^*,v^*):A^n\rightarrow R$,对于 S^*,u^*,v^*, 通过下面的方式来固定:

$$\Pi_t(S,S^*,u^*,v^*)=\sum_{i\in I_t}u_i^*[G_i(S^*)F_i(S)-F_i(S^*)G_i(S)]+\sum_{j\in J_t}v_j^*H_j(S),t\in K$$

定理 3 令 $S^*\in F$,假设 $F_i,G_i,i\in\underline{p}$ 和 $H_j,j\in\underline{q}$ 在 S^* 可微且存在 $u^*\in U,v^*\in R_+^q$ 使得式(1)和式(2)成立. 进一步假设下面的 3 个假定满足其中任何一个:

(a) (i) $(\Pi_0(\cdot,S^*,u^*,v^*),\cdots,\Pi_k(\cdot,S^*,u^*,v^*))$ 在 S^* 是 $(F,\alpha,\bar{\rho},\theta)$-$V$-伪凸.

(ii) $(\Delta_{k+1}(\cdot,v^*),\cdots,\Delta_m(\cdot,v^*))$ 在 S^* 是 $(F,\tilde{\rho},\theta)$-V-拟凸.

(iii) $\bar{\rho}+\tilde{\rho}\geqslant 0$.

(b) (i) $(\Pi_0(\cdot,S^*,u^*,v^*),\cdots,\Pi_k(\cdot,S^*,u^*,v^*))$在 S^* 是预严格$(F,\alpha,\bar{\rho},\theta)$-$V$-拟凸.

(ii) $(\Delta_{k+1}(\cdot,v^*),\cdots,\Delta_m(\cdot,v^*))$在 S^* 是严格$(F,\tilde{\rho},\theta)$-V-伪凸.

(iii) $\bar{\rho}+\tilde{\rho}\geqslant 0$.

(c) (i) (a)(ii)和(b)(i)成立.

(iii) $\bar{\rho}+\tilde{\rho}>0$.

则 S^* 是问题(P)的有效解.

证明 (**a**) 假设 S^* 不是问题(P)的有效解,这个假设导致了不等式 $G_i(S^*)F_i(\bar{S})-F_i(S^*)G_i(\bar{S})\leqslant 0,i\in \underline{p}$. 对于指标集 $l\in\underline{p}$,至少有一个严格的不等式成立,对某个$\bar{S}\in F$,因为 $u^*>0$,所以下面的不等式(8)成立:

$$\sum_{i\in I_t}u_i^*[G_i(S^*)F_i(\bar{S})-F_i(S^*)G_i(\bar{S})]\leqslant 0,t\in K \tag{8}$$

因为 $v^*\geqslant 0,\bar{S},S^*\in F$,由式(2),式(8)对每个 $t\in K$,有

$$\Pi_t(\bar{S},S^*,u^*,v^*)=\sum_{i\in I_t}u_i^*[G_i(S^*)F_i(\bar{S})-F_i(S^*)G_i(\bar{S})]+\sum_{j\in I_t}v_j^*H_j(\bar{S})\leqslant$$

$$\sum_{i\in I_t}u_i^*[G_i(S^*)F_i(\bar{S})-F_i(S^*)G_i(\bar{S})]\leqslant 0=$$

$$\sum_{i\in I_t}u_i^*[G_i(S^*)F_i(S^*)-F_i(S^*)G_i(S^*)]+\sum_{j\in J_t}v_j^*H_j(S^*)=\Pi_t(S^*,S^*,u^*,v^*)$$

$$\sum_{t\in K}\alpha_t(\bar{S},S^*)\Pi_t(\bar{S},S^*,u^*,v^*)<\sum_{t\in K}\alpha_t(\bar{S},S^*)\Pi_t(S^*,S^*,u^*,v^*)$$

由条件(a)(i)蕴涵了

$$F(\bar{S},S^*;\sum_{i=1}^{p}u_i^*[G_i(S^*)DF_i(S^*)-F_i(S^*)DG_i(S^*)]+\sum_{t\in K}\sum_{j\in J_t}v_j^*DH_j(S^*)<-\bar{\rho}d^2(\theta(\bar{S},S^*)) \tag{9}$$

又因为对每个 $t\in M\backslash K,\Delta_t(\bar{S},v^*)\leqslant 0=\Delta_t(S^*,v^*)$,因此有

$$\sum_{t\in M\backslash K}\beta_t(\bar{S},S^*)\Delta_t(\bar{S},v^*)\leqslant\sum_{t\in M\backslash K}\beta_t(\bar{S},S^*)\Delta_t(S^*,v^*)$$

条件(a)(ii)蕴涵了

$$F(\bar{S},S^*;\sum_{t\in M\backslash K}\sum_{j\in J_t}v_j^*DH_j(S^*)<-\tilde{\rho}d^2(\theta(\bar{S},S^*)) \tag{10}$$

现在增加式(9)和式(10). 由 $F(\bar{S},S^*;\cdot)$的次线性和条件(a)(iii),可以得到:

$$F(\bar{S},S^*;\sum_{i=1}^{p}u_i^*[G_i(S^*)DF_i(S^*)-F_i(S^*)DG_i(S^*)]+\sum_{j=1}^{q}v_j^*DH_j(S^*)<-(\bar{\rho}+\tilde{\rho})d^2(\theta(\bar{S},S^*))$$

这就与式(1)矛盾,因此,S^* 是问题(P)的有效解.

(b),(c)的证明和(a)部分相似.

定理 2 和定理 3 的这 6 个充分有效性条件包含了很多重要的特殊情况,直接通过适当的选择分割集 J_0,$J_1,\cdots,J_m$ 和 $F,\alpha,\beta,\bar{\rho},\tilde{\rho}$ 和 θ 来辨别.

参考文献:

[1] MIETTINEN K. Nonlinear Multiobjective Optimization[M]. KluwerAcademic, Boston, MA, 1999

[2] DINKELBACH W. On nonlinear fractional programming[J]. Management Sci, 1967(13):492-498

[3] ANTCZAK T. A Class of $B-(p,r)$ Invex Functions and Mathematical Programming[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003(286):187-208

[4] BHATIA D, TEWARI S. Multiobjective fractional duality for n-set functions[J]. J Inform Optim Sci, 1993(14):321-334

[5] PREDA V. On duality of multiobjective fractional measurable subset selection problems[J]. J Math Anal Appl, 1995(196):514-525

[6] BHATIA D, MEHRA A. Lagrange duality in multiobjective fractional programming problems with n-set functions[J]. J Math Anal Appl, 1999(236):306-311

[7] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. On properties of semipreinvex functions [J]. Bull Austral Math Soc, 2003(68):449-459

[8] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Characterizations and Applications of Prequ-asi-Invex Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 110(3):645-668

Semiparametric Sufficient Efficiency Conditions for Multiobjective Fractional Programming Problems under the Generalized (F,α,ρ,θ)-V- convex

JIANG wei-qiong

(Department of Basic Course Teaching of Rongzhi College, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400033, China)

Abstract: In the paper, relatively big semiparametric sufficient efficiency conditions under all kinds of generalized (F,α,ρ,θ)-V- convexity assumptions for a multiobjective fractional subset programming problem are given.

Key words: generalized(F,α,ρ,θ)-V-convex; semiparameter; effectiveness condition

责任编辑:李翠薇