文章编号:1672 - 058X(2012)04 - 0017 - 03

平面图无圈边着色的一个结果

杨文娟, 谢德政

(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘　要:图 G 的无圈边着色是指图 G 的一个正常边着色且不含双色的圈. 图 G 的无圈边色数是指图 G 的无圈边着色中所用色数的最小者,用 $x'_a(G)$ 表示;证明了如果 G 是一个 D 中的顶点不与 3 - 面相关联,3 - 顶点不与 D 中的顶点相邻且 $\Delta(G)\geqslant 6$ 的平面图,则 $x'_a(G)\leqslant\Delta(G)+1$.

关键词:平面图;无圈边着色;无圈边色数

中图分类号:O157.5　　　　**文献标志码:** A

1　基础知识

在此仅考虑简单无向的有限图. 给定一个图 G,分别用 $V(G)$、$E(G)$、$F(G)$ 表示 G 的点集、边集、面集. 如果 $uv\in E(G)$,称顶点 u 为顶点 v 的邻点,并且用 $N(v)$ 表示顶点 v 所有邻点的集合. 顶点 v 的度用 $d(v)$ 表示,$d(v)=|N(v)|$,用 $\Delta(G)$,$\delta(G)$ 分别表示 G 的最大度和最小度,用 k - 顶点表示度是 k 的顶点. 集合 D 表示图 G 中所有 3 - ,4 - 和 5 - 顶点组成的集合. 用 $d(f)$ 表示面 f 的度,即与面 f 相关联的边的个数,其中割边要计算两次. k - 面表示度是 k 的面. G 的围长是指 G 中最短圈的长度.

图 G 的无圈边着色是指 G 的一个正常边着色且不含双色的圈;图 G 的无圈边色数是指图 G 的无圈边着色中所用颜色个数的最小值,用 $x'_a(G)$ 表示. 用 C 表示图 G 的一个无圈 k 边着色的颜色集,对任意的边 $uv\in E(G)$,$C(uv)$ 表示边 uv 所着的颜色;类似地,对任意的顶点 $v\in V(G)$,$C(v)$ 表示与 v 关联的所有边所着颜色组成的集合.

无圈边着色的概念最早是由 Alon[1] 等人提出的,并且给出了 $x'_a(G)\leqslant 64\Delta(G)$. 之后 Molloy 和 Reed[2] 将结果改进为 $x'_a(G)\leqslant 16\Delta(G)$. Alon,Sudakov 和 Zaks 在文献[3]中证明了存在一个常数 c,对于围长至少为$c\Delta(G)\log\Delta(G)$的图 G,满足 $\Delta(G)\leqslant x'_a\leqslant\Delta(G)+2$,并证明了该不等式对几乎所有 Δ - 正则图成立,同时提出了猜想,即:$\Delta(G)\leqslant x'_a\leqslant\Delta(G)+2$ 对所有的图 G 成立,称之为无圈边着色猜想. 文献[4]中证明了该猜想对 1 - 树和外平面图成立.

在此证明了如果 G 是一个 D 中的顶点不与 3 - 面相关联,3 - 顶点不与 D 中的顶点相邻且 $\Delta(G)\geqslant 6$ 的平面图,则 $x'_a(G)\leqslant\Delta(G)+1$.

2　主要结果及证明

定理 1　图 G 满足 D 中的顶点不与 3 - 面相关联,3 - 顶点不与 D 中的顶点相邻且 $\Delta(G)\geqslant 6$,则 $x'_a(G)\leqslant$

收稿日期:2011 - 11 - 13;**修回日期:**2011 - 12 - 25.

作者简介:杨文娟(1986-),女,山西吕梁人,硕士研究生,从事图论及其应用研究.

$\Delta(G)+1$.

证明 用反证法证明. 假设定理1结论不成立,设图 G 是满足定理1的条件且含边数最小的反例. 显然有 $\delta(G)\geqslant 2$.

引理1 $\delta(G)\geqslant 3$

证明 用反证法证明. 假设引理1不成立,则图 G 中必然存在2-顶点. 设 v 是 G 中的一个2-顶点,其中 $N(v)=\{u,x\}$. 用 $L=\{1,2,\cdots,\Delta(G),\Delta(G)+1\}$ 表示对 G 着色的一个有 $\Delta(G)+1$ 种颜色的集合. 令 H 表示 G 中顶点 x 和 v 重合成一个顶点,而其他都不作任何改变得到的图,在 H 中仍用 v 表示这个顶点,那么有 $|E(H)|=|E(G)|-1$. 由于 G 是边数最小的反例,则 H 可以用 L 中的颜色进行无圈边着色. 可以证明用 L 也可以对 G 进行无圈边着色. 选择一种颜色 $\alpha\in L\backslash C(v)$,用它给边 vx 着色,由于在 H 中顶点 v 满足 $d(v)\leqslant\Delta(G)$,则有 $|C(x)|\leqslant\Delta(G)$,从而 $|L\backslash C(v)|\geqslant\Delta(G)+1-(1+\Delta(G)-1)=1$,所以这样的 α 存在.

从而证明了可以用 $\Delta(G)+1$ 种颜色对 G 进行无圈边着色,与 G 是边数最小的反例矛盾,引理1得证.

下面将证明定理1. 由 Euler 公式 $|V(G)|+|F(G)|-|E(G)|=2$,可以改写成如下形式:

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-4)+\sum_{f\in F(G)}(d(f)-4)=-4(|V(G)|+|F(G)|-|E(G)|)=-8<0$$

现在对集合 $V(G)\cup F(G)$ 中的每个元素 x,定义初始权值函数 $w(x)$:如果 $v\in V(G)$,令 $w(v)=d(v)-4$;如果 $f\in F(G)$,令 $w(f)=d(f)-4$. 对 G 的每个顶点和面按照下面的规则可得到新的权值函数 $w'(x)$. 由于权值只是在相邻的顶点和面之间转移,所以转移前后所有顶点和面的权值总和应保持不变,即 $\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w'(x)=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w(x)=-8<0$. 如果可以证明,对任意的 $x\in V(G)\cup F(G)$,不等式 $\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w'(x)\geqslant 0$ 成立,就产生了矛盾,从而定理1得证. 其中权转移规则如下:

(R1.1) 满足 $d(x)\geqslant 6$ 的顶点 x 分给相邻的3-顶点 $\frac{1}{3}$;

(R1.2) 满足 $d(x)\geqslant 6$ 的顶点 x 分给相关联的3-面 $\frac{1}{3}$.

对任意的顶点 $x\in V(G)$,根据引理1可知,$d(x)\geqslant 3$.

(1) 当 $d(x)=3$ 时,因为图 G 中3-顶点不与 D 中的顶点相邻,即不与3-,4-和5-顶点相邻,所以 x 的邻点的度都不小于6,从而根据规则 R1.1,x 的每个邻点都转移 $\frac{1}{3}$ 给 x,则有 $w'(x)=3-4+\frac{1}{3}\times 3=0$;

(2) 当 $4\leqslant d(x)\leqslant 5$ 时,则有 $w'(x)=w(x)=d(x)-4\geqslant 0$;

(3) 当 $d(x)=6$ 时,因为 G 满足 D 中的顶点不与3-面相关联,则有3-顶点不与3-面相关联,那么与顶点 x 相邻的3-顶点的个数加上与 x 相关联的3-面的个数其总和不超过6,根据规则 R1.1,R1.2,则有 $w'(x)\geqslant 6-4-\frac{1}{3}\times 6=0$;

(4) 当 $d(x)\geqslant 7$ 时,与上面的(3)类似,可得与顶点 x 相邻的3-顶点的个数加上与 x 相关联的3-面的个数其总和不超过 $d(x)$,从而根据规则 R1.1,R1.2,则有 $w'(x)\geqslant d(x)-4-d(x)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}d(x)-4\geqslant\frac{2}{3}>0$.

对任意的面 $f\in F(G)$,因为在此研究的是简单图,所以 $d(f)\geqslant 3$.

(1) 当 $d(f)=3$ 时,因为 G 满足 D 中的顶点不与3-面相关联,所以与3-面相关联的3个顶点的度都不小于6,从而每个与 f 相关联的顶点都转移 $\frac{1}{3}$ 给 f,根据规则 R1.2,则有 $w'(f)=3-4+\frac{1}{3}\times 3=0$;

(2) 当 $d(f)\geqslant 4$ 时,则有 $w'(f)=w(f)=d(f)-4\geqslant 0$.

综上所述,有 $0\leqslant\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w'(x)=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w(x)=-8$,显然矛盾,定理1证毕.

参考文献:

[1] ALON N, MCDIARMID C J H, REED B A. Acyclic coloring of graphs[J]. Random Structures Algorithms, 1991, 2: 277-288

[2] MOLLOY M, REED B. Further algorithmic aspects of the local lemma[J]. Proceedings of the 30th annual ACM symposium on theory of computing, 1998, 30(5): 524-529

[3] ALON N, SUDAKOV B, ZAKS A. Acyclic coloring of graphs[J]. J Graph Theory, 2001, 37: 157-167

[4] 孙绪宝,钟顺时. 基于神经网络的盲波束形成[J]. 电波科学学报, 2004, 19(2): 237-239

A Result from Acyclic Edge Coloring of Plane Graphs

YANG Wen-juan, XIE De-zheng

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: An acyclic edge coloring of Graph G is a proper edge coloring without bichromatic cycles. The acyclic edge chromatic number of a graph G, denoted by $x'_a(G)$, is the minimum chromatic number in acyclic edge coloring. In this paper, we prove that $x'_a(G) \leqslant \Delta(G)+1$ if the plane graph G satisfies that the vertex in D is not incident with a 3-face, a 3-vertex is not adjacent to the vertex in D and $\Delta(G) \geqslant 6$.

Key words: plane graphs; acyclic edge coloring; acyclic edge chromatic number

责任编辑:代小红

(上接第 **10** 页)

Existence of Periodic Solutions to the Second Order Neutral Functional Differential Equation

XU Zong -qin

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: In this paper, by using the Krasnoselskii fixed point theorem, the author studied the existence of periodic solution to the Second Order Neutral Functional Differential Equation $\left[x(t)+\sum_{i=1}^{n} c_i x(t-\tau_i)\right]'' = a(t)x(t) - f(t, x(t-\sigma(t)))$.

Key words: neutral functional differential equation; periodic solution; Krasnoselskii fixed point theorem

责任编辑:田　静

校　　对:李翠薇