文章编号:1672 - 058X(2012)03 - 0055 - 03

关于和式极限的探求*

方 辉 平
(黄山学院 数学系, 安徽 黄山 245041)

摘　要:介绍了利用极限定义、Stolz 公式两种求和式极限的方法,着重分析了利用等价代换求和式极限及其存在的误区,较好地解决了一类特殊"和式"的极限问题.

关键词:和式极限;等价代换;误区

中图分类号:O172　　**文献标志码:**A

极限是研究数列和函数性质的一个重要工具,在数学分析中许多基本概念和问题都和极限密切相关. 和式极限在不少专著里均有所涉及[1,2],却并没有专题研究它的求法. 大学生数学竞赛题涉及该类极限问题较多,促使学者探究如何较好解决和式极限问题.

1　利用定积分定义求极限

定积分是用黎曼和的极限来刻画的,可以利用定积分的定义及其计算求极限. 利用极限定义求极限的技巧就是把通项写成两部分的乘积,一部分是区间等分所得的小区间长度,另一部分是关于分点坐标的函数. 首先看第二届全国大学生数学竞赛决赛的一道试题.

例 1　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解析　首先将其写成和的形式 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$,通项$\frac{1}{n+k}$可以表示成$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$,其中$\frac{1}{n}$就是区间 $[0,1]$ n 等分所得小区间长度,$\frac{k}{n}$就是分点 x_k 的坐标.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2$$

例 2　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}}{nk+1}$.

解

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}}{nk+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+\frac{1}{n}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

收稿日期:2011 - 10 - 17;**修回日期:**2011 - 10 - 24.

* **基金项目:**安徽省高校省级教育教学研究项目(20100996).

作者简介:方辉平(1976 -),男,安徽歙县人,副教授,硕士,从事常微分方程及其应用研究.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=e-1$$

所以由夹逼定理得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{ke^{\frac{k}{n}}}{nk+1}=e-1$.

这是第十八届北京市大学生数学竞赛的一道试题,综合使用了夹逼准则和极限的定义求极限.

2 利用 Stolz 定理求极限

Stolz 定理 已知 $y_n\to\infty$,并且从某一项起,y_n 严格单调上升(即存在 $N_0\in N$,当 $n>N_0$ 时,有 $y_{n+1}>y_n$),又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$(或 $\pm\infty$),则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$.

例 3 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2kx_k}{n^2}$.

解 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}2kx_n$,$b_n=n^2$,则 b_n 单调递增,由 Stolz 定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2kx_k}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2nx_n}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

也有一些学者[3]对 Stolz 定理进行推广,并用来求极限.

3 等价代换求极限及其误区分析

在数学分析里提到等价无穷小量的概念, 并利用等价无穷小量替换来计算极限. 有少数学者研究了求和式极限时利用等价无穷小代换,但都没有分析过这种代换的误区. 下面着重分析定理的运用和误解.

定理 1 设点列 $\{x_{nk}\}(k=1,2,\cdots,n)$,满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{nk}=0$,并且当 $n\to\infty$ 时,$f(x_{nk})$ 和 $g(x_{nk})$ 是两个等价无穷小量,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}g(x_{nk})$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_{nk})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}g(x_{nk})$.

证明 对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当 $0<|x_{nk}|<\delta$ 时,恒有 $\left|\dfrac{f(x_{nk})}{g(x_{nk})}-1\right|<\varepsilon$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{nk}=0$ 得,对上述 $\delta>0$,总存在一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对任意的 $k(=1,2,\cdots,n)$,都有 $|x_{nk}|<\delta$ 成立.

即对 $\forall\varepsilon>0$,总存在一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对任意的 $k(=1,2,\cdots,n)$,恒有 $\left|\dfrac{f(x_{nk})}{g(x_{nk})}-1\right|<\varepsilon$. 所以当 $g(x_{nk})>0$ 时,得 $(1-\varepsilon)g(x_{nk})<f(x_{nk})<(1+\varepsilon)g(x_{nk})$,于是 $(1-\varepsilon)\sum\limits_{k=1}^{n}g(x_{nk})<\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_{nk})<(1-\varepsilon)\sum\limits_{k=1}^{n}g(x_{nk})$

由 ε 的任意性,得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1-\varepsilon)\sum\limits_{k=1}^{n}g(x_{nk})\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\varepsilon)\sum\limits_{k=1}^{n}g(x_{nk})\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}g(x_{nk})$. 由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{nk})=\lim\limits_{n\to\infty}g(x_{nk})$. 当 $g(x_{nk})<0$ 时,证明同上. 证毕.

例 4 讨论极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n(n-k)}$.

错解一 当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{k}{n(n-k)}$ 与 $\dfrac{k}{n^2}$ 是等价无穷小,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n(n-k)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}=\dfrac{1}{2}$.

错解二 $\dfrac{1}{1-\dfrac{k}{n}}-1$ 与 $\dfrac{k}{n}$ 是等价无穷小,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n-k)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-\frac{k}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}=\frac{1}{2}$$

正确解
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n-k)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1-\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x=-1-[\ln(1-x)]_0^1=+\infty$$

下面是首届中国大学生数学竞赛决赛的一道试题.

例 5　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

解　记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$,则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n-1}k+\frac{\pi}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

下面给出两个易混淆的错误命题:

错误命题 1　设当 $n\to\infty$ 时,$f(n,k)$ 和 $g(n,k)$ 是两个等价无穷小量,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}g(n,k)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_{nk})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}g(x_{nk})$.

错误命题 2　设点列 $\{x_{nk}\}(k=1,2,\cdots,n)$,满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{nk}=0$,并且当 $n\to\infty$ 时,$f(x_{nk})$ 和 $g(x_{nk})$ 是两个等价无穷小量,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}g(x_{nk})$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_{nk})h(n,k)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}g(x_{nk})h(n,k)$.

这两个错误命题都可以以例 4 作为反例. 以上这两种代换在一般数列极限的等价无穷小替换法经常使用,但是对于和式极限,使用这两个命题,往往导致错误的结果.

参考文献:

[1] 毛京中. 高等数学竞赛与提高[M]. 北京:北京理工大学出版社,2002

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册)[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2001

[3] 庹亚林. Stolz 定理数列形式的一个逆命题及其推广[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2009,26(4):322-326

Research on Sum Limit

FANG Hui-ping

(Department of Mathematics , Huangshan University, Anhui Huangshan 245041,China)

Abstract:This paper introduces two methods for the solution to the sum limit by using limit definition and Stolz formula ,and mainly analyzes the solution to the sum limit by using equivalent substitution and its wrong viewpoint, which solved a class of special “sum” limit problems.

Key words:sum limit;equivalent substitution;wrong viewpoint

责任编辑:李翠薇