文章编号:1672 -058X(2012)03 -0029 -04

B-不变凸多目标分式规划问题的最优性条件

李 婷[1], 彭再云[2]
(1. 山西大学 商务学院 理学系,太原 030031;2. 重庆交通大学 理学院,重庆 400074)

摘 要:首先得到了 B-不变凸函数的一个重要定理,然后在 B - 不变凸性条件下,考虑了多目标分式规划问题的目标函数和约束函数的 B - 不变凸性,给出了多目标分式规划问题的最优性条件.

关键词:B-不变凸性;多目标分式规划;最优性条件
中图分类号:O174.4 **文献标志码:**A

考虑如下多目标分式规划问题(MFP):

$$(\mathrm{MFP})\quad \min \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)},\frac{f_2(x)}{g_2(x)},\cdots \frac{f_p(x)}{g_p(x)}\right)^{\mathrm{T}}$$
$$\mathrm{s.t.}\quad h(x) \leqslant 0$$
$$x \in S$$

其中,$S \in R^n$ 是一个开集,$f_i,g_i(i=1,2,\cdots,p)$是定义在 S 上的实值函数,h 是定义在 S 上的 m - 维向量函数. 假定 $f_i(x) \geqslant 0, g_i(x)>0(i=1,2,\cdots,p), x \in S$. 并且假设 f_i,g_i 和 $h_j(i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,m)$在 S 上连续可微.

定义 (MFP)的一个可行解 $x_0 \in S$ 称为(MFP)的一个有效解,如果再没有(MFP)的可行解 $x \in S$,使得 $\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

1 最优性条件

引理 1[1]**(封闭性)** $S \subset R^n$ 是开集,f,g 是定义在 S 上的可微实值函数,$f(x) \geqslant 0, g(x)>0, x_0 \in S$,假设 $f(x), -g(x)$ 在 x_0 点是关于 $\eta(x,x_0), b(x,x_0)$ 的 B - 不变凸函数,则$\frac{f(x)}{g(x)}$在 x_0 点是关于$\bar{\eta}(x,x_0) = \frac{g(x_0)}{g(x)}\eta(x,x_0), b(x,x_0)$的 B - 不变凸函数.

定理 1 $S \subset R^n$ 是开集,f,g 是定义在 S 上的可微实值函数,$f(x) \geqslant 0, g(x)>0, x_0 \in S$,假设 $f(x), -g(x)$ 在 x_0 点是关于 $\eta(x,x_0), b(x,x_0)$ 的 B - 不变凸函数,则$\frac{f(x)}{g(x)}$在 x_0 点是关于 $\hat{\eta}(x,x_0) = g^2(x_0)\eta(x,x_0), b(x, x_0)$的拟 B - 不变凸函数.

收稿日期:2011 -08 -08;**修回日期:**2011 -09 -15.
作者简介:李婷(1981-), 女, 山西永济人, 助教, 从事最优化理论与算法研究.

证明 $\forall x \in S$,有:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)}$$

当$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\leqslant 0$时,有:

$$\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\leqslant 0$$

由于$g(x)g(x_0)>0$,所以

$$f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)\leqslant 0$$

即:

$$g(x_0)[f(x)-f(x_0)]+f(x_0)[g(x_0)-g(x)]\leqslant 0$$

上面不等式两端同时乘以$b(x,x_0)$,得:

$$g(x_0)b(x,x_0)[f(x)-f(x_0)]+f(x_0)b(x,x_0)[g(x_0)-g(x)]\leqslant 0$$

由$f(x)$, $-g(x)$在x_0点关于$\boldsymbol{\eta}(x,x_0)$, $b(x,x_0)$是$B-$不变凸的,有:

$$g(x_0)\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\nabla f(x_0)-f(x_0)\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\nabla g(x_0)\leqslant 0$$

$$g^2(x_0)\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\left[\frac{g(x_0)\nabla f(x_0)-f(x_0)\nabla g(x_0)}{g^2(x_0)}\right]\leqslant 0$$

$$g^2(x_0)\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\nabla\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\leqslant 0$$

上面不等式两端同时乘以$b(x,x_0)$,得:

$$b(x,x_0)g^2(x_0)\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\nabla\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\leqslant 0$$

令$\hat{\boldsymbol{\eta}}(x,x_0)^{\mathrm{T}}=g^2(x_0)\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}$,可得结论.

定理 2 设x_0是(MFP)的一个可行解,假设存在$\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2\cdots,\tau_p)^{\mathrm{T}}\in R_+^p$, $\sum_{i=1}^{p}\tau_i=1$, $\boldsymbol{\tau}>0$和$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m)^{\mathrm{T}}\in R_+^m$, $\boldsymbol{\lambda}\geqslant 0$,满足

$$\sum_{i=1}^{p}\tau_i\nabla\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\nabla h_j(x_0)=0 \tag{1}$$

$$\lambda_j h_j(x_0)=0, j=1,2,\cdots,m \tag{2}$$

如果$f_i(x)$, $-g_i(x)$在x_0处关于$\boldsymbol{\eta}(x,x_0)$, $b_i(x,x_0)$是B_i-不变凸的, $i=1,2,\cdots,p$. $h_j(x)$在x_0处关于$\boldsymbol{\eta}(x,x_0)$, $b_j(x,x_0)$是B_j-不变凸的, $j=1,2,\cdots m$. 则x_0为(MFP)的有效解.

证明 若x_0不是(MFP)的有效解,则存在(MFP)的一个可行解x,使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(x_0)}{g(x_0)},\text{即}\ \frac{f_i(x)}{g_i(x)}\leqslant\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}\quad i=1,2,\cdots,p \tag{3}$$

且至少有一个不等式严格成立.

由引理 1 可知,在$\frac{f_i(x)}{g_i(x)}$在x_0处关于$\frac{g_i(x_0)}{g_i(x)}\boldsymbol{\eta}(x,x_0)$, $b_i(x,x_0)$是B_i-不变凸的,即:

$$b_i(x,x_0)\left[\frac{f_i(x)}{g_i(x)}-\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}\right]\geqslant\frac{g_i(x_0)}{g_i(x)}\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\nabla\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}$$

由式(3)有$\frac{f_i(x)}{g_i(x)}-\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}\leqslant 0$, $i=1,2,\cdots,p$. 至少有一个不等式是严格的. 又$b_i(x,x_0)\geqslant 0$,所以$\frac{g_i(x_0)}{g_i(x)}\boldsymbol{\eta}(x,$

$x_0)^{\mathrm{T}}\nabla\dfrac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p$. 至少有一个不等式是严格的. 由于$\dfrac{g_i(x_0)}{g_i(x)}>0$,因此

$$\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\nabla\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p$$

至少有一个不等式是严格的. 两端同时乘以 $\tau_i(\tau_i>0)$,得:

$$\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\tau_i\nabla\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p$$

将这 p 个不等式分别乘以 τ_i,再相加得:

$$\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{p}\tau_i\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}<0 \tag{4}$$

另一方面,$h_j(x)$ 在 x_0 处关于 $\boldsymbol{\eta}(x,x_0)$,$b_j(x,x_0)$是 B_j – 不变凸的,$j=1,2,\cdots m$. 所以

$$b_j(x,x_0)[h_j(x)-h_j(x_0)]\geqslant\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\nabla h_j(x_0), j=1,2,\cdots,m$$

上式两边同乘以 λ_j 得:

$$\lambda_j b_j(x,x_0)(h_j(x)-h_j(x_0))\geqslant\lambda_j\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\nabla h_j(x_0), j=1,2,\cdots,m$$

由定理 2 及 $h_j(x)\leqslant 0$,$b_j(x,x_0)\geqslant 0$,有 $\lambda_j\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\nabla h_j(x_0)\leqslant 0, j=1,2,\cdots,m$

上面 m 个不等式相加得:

$$\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\nabla h_j(x_0)\leqslant 0 \tag{5}$$

将式(4)和式(5)的两端分别相加得:

$$\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{p}\tau_i\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\nabla h_j(x_0)\right)<0$$

由式(1)得:

$$0=\boldsymbol{\eta}(x,x_0)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{p}\tau_i\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\nabla h_j(x_0)\right)<0$$

此式不成立,故 x_0 为(MFP)的有效解.

定义指标集

$$J=\{j\mid h_j(x_0)=0\} \tag{6}$$

定理 3　设 x_0 是(MFP)的一个可行解,假设存在 $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2\cdots,\tau_p)^{\mathrm{T}}\in R_+^p$,$\boldsymbol{\tau}>0$,$\sum_{i=1}^{p}\tau_i=1$ 和 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m)^{\mathrm{T}}\in R_+^m$,$\boldsymbol{\lambda}\geqslant 0$,满足:

$$\sum_{i=1}^{p}\tau_i\nabla\frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\nabla h_j(x_0)=0$$

$$\lambda_j h_j(x_0)=0, j=1,2,\cdots,m$$

如果 $f_i(x)$,$-g_i(x)$在 x_0 处关于 $\boldsymbol{\eta}(x,x_0)$,$b_i(x,x_0)$是 B_i – 不变凸的,$i=1,2,\cdots,p$.

$h_j(x)(j\in J)$在 x_0 处关于 $\boldsymbol{\eta}(x,x_0)$,$b_j(x,x_0)$是拟 B_j – 不变凸的,$j=1,2,\cdots,m$. 则 x_0 为(MFP)的有效解.

证明　结合定理 1,证明过程与定理 2 类似.

参考文献:

[1] 赵克全,黄应全. *B*-不变凸分式规划的最优性条件及对偶定理[J]. 湖北民族学院学报,2004,22(3):19-21

[2] YANG X M,YANG X Q,TEO K L,Characterizations and applications of prequasiinvex functions[J]. J Optim Theory Appl.,2001,110(3):645-668

[3] LIANG Z A,HUANG H X,PARDALOS P M. Optimality conditions and duality for a nolinear fractional programming problems [J]. J Opti Theo Appl,2001,110:611-619

[4] LIANG Z A,HUANG H X,PARDALOS P M. Optimality conditions and duality for a class of multiobjective fractional programming problems[J]. J Global Optim,2003,27:447-471

[5] BECTOR C R,SINGH C. B-vex functions[J]. J Optim Theory Appl,1991,71:237-253

[6] BECTOR C R,SUNEJA S K,LALITHA C S. Generalized B-vex functions and generalized B-vex programming[J]. J Optim Theory Appl,1993,76:561-576

[7] SUNEJA S K,SINGH C,BECTOR C R. Generalization of preinvex and B-vex functions[J]. J Optim Theory Appl,1993,76:577-587

[8] 林锉云,董加礼. 多目标规划的方法与理论[M]. 吉林:吉林教育出版社,1992

[9] 李婷. 严格 *B*-预不变凸分式规划的最优性条件[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2008(3):19-21

Optimality Condition for *B*-invex Multi-objective Fractional Programming Problem

LI Ting[1], PENG Zai-yun[2]

(1. Department of Sciences, Business College, Shanxi University, Shanxi Taiyuan 030031, China;

2. College of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: In this paper, one important theorem of B-invex functions is obtained firstly, and then under the condition of B-invexity, the objective function of multi-objective fractional programming and B-invexity of constraint function are considered, the optimality condition for multi-objective fractional programming is given.

Key words: B-invexity; multi-objective fractional programming; optimality condition

责任编辑:田 静