文章编号:1672 -058X(2012)03 -0027 -02

关于不定方程 $x^2+64=y^7$ 的解的讨论

张 杰
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘 要:在高斯整环中,利用代数数论的方法,证明了 不定方程 $x^2+64=y^7$ 的有理整数解,推进了不定方程的研究.

关键词:不定方程;整数解;整环

中图分类号:O156.2 **文献标志码**:A

$A,B\in N$,A 无平方因子. 研究不定方程 $Ax^2+B=y^t$(其中 $x,y,n\in N,t\equiv1(\bmod 2),t>1$)的解是代数数论的一类重要课题,对于此类不定方程用初等的方法是个相当困难的问题,近来文献[1]-[4]用代数数论的方法证明了几种不同方程的有理整数解. $A=1,B=64,t=7$ 至今无人给出正确的证明结果,为此利用代数数论的方法证明了此时不定方程 $x^2+64=y^7$ 仅有整数解 $x=\pm8,y=2$.

定理 不定方程

$$x^2+64=y^7,x,y\in Z \tag{1}$$

仅有整数解 $x=\pm8,y=2$.

证明 先假设 $x\equiv1(\bmod 2)$,在 $Z[\mathrm{i}]$ 中,式(2)可以写为:$(x+8\mathrm{i})(x-8\mathrm{i})=y^7,x,y\in Z$.

设 $\delta=([x+8\mathrm{i}],[x-8\mathrm{i}])$,由 $\delta\mid([2x],[16\mathrm{i}])=[2]$,知道 δ 只能是 $[1],[1+\mathrm{i}],[2]$,因 $x\equiv1(\bmod 2)$,知道 $x+8\mathrm{i}\equiv1(\bmod 2)$,所以 $\delta\neq[2]$;如果 $\delta=[1+\mathrm{i}]$,则 $N(1+\mathrm{i})\mid N(x+8\mathrm{i})$,即 $2\mid x^2+64$,但 $x\equiv1(\bmod 2)$,产生矛盾,因此 $\delta=[1]$.

由 $Z[\mathrm{i}]$唯一分解性得到 $x+8\mathrm{i}=(a+b\mathrm{i})^7,x,a,b\in Z$,因而有

$$x=a^7-21a^5b^2+35a^3b^4-7ab^6 \tag{2}$$

$$8=b(7a^6-35a^4b^2+21a^2b^4-b^6) \tag{3}$$

因此 $b=\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$.

当 $b=1$ 时,由式(3)得 $7a^6-35a^4+21a^2-9=0$,两边模 7 得 $-2\equiv0(\bmod 7)$,矛盾;当 $b=-1$ 时,由式(3)得 $7a^6-35a^4+21a^2=-7$,即 $a^2(a^4-5a^2+3)=-1$,得到 $a=\pm1$,代入式(2),得到 $x=\pm8$ 与 $x\equiv1(\bmod 2)$,矛盾;当 $b=\pm2$ 时,由式(3)得到 $7a^6-140a^4+336a^2=68$ 或 60,此等式两边取模 7,推出矛盾;当 $b=\pm4$ 时,由式(3)得到 $7a^6-560a^4+5\,376a^2=4\,098$ 或 4 094,两边取模 7,推出矛盾;当 $b=8$ 时,等式(3)两边模 7 得到 $2\equiv0(\bmod 7)$ 又推出矛盾;当 $b=-8$ 时,由式(3)得等式 $7a^6-35\times8^2a^4+21\times8^4a^2=8^6-1=37\,449\times7$. 两边约去因子 7 得到 $a^2(a^4-320a^2+12\,288)=9\times3\times19\times73$,$a^2$ 可能取值 1 或 9,代入此式都不满足等式成立. 所以 $x\equiv1(\bmod 2)$时,式(1)无有理整数解.

再讨论 $x\equiv0(\bmod 2)$的情况,容易知道 y 也是偶数,令 $x=2x_1,y=2y_1,x_1,y_1\in Z$,此时式(1)变为:$(2x_1)^2+64=(2y_1)^7$,即 $x_1^2+16=32y_1^7(x_1,y_1\in Z)$,易知 x_1 必为偶数,令 $x_1=2x_2$,得到 $x_2^2+4=8y_1^7$,此时 x_2 也为偶

收稿日期:2011 -10 -25;**修回日期**:2011 -11 -22.
作者简介:张杰(1987-),男,江苏盐城人,硕士研究生,从事代数数论研究.

数,令 $x_2=2x_3$,得到 $x_3^2+1=2y_1^7$,易知 x_3 必为奇数,在 $Z[\mathrm{i}]$ 中它可以写成 $[x_3+\mathrm{i}][x_3-\mathrm{i}]=[1-\mathrm{i}]^2[y_1]^7$.设 $\mu=([x_3+\mathrm{i}],[x_3-\mathrm{i}])$,由 $\mu\mid([2x_3],[2\mathrm{i}])=2$,知道 μ 可能取 $[1]$,$[1-\mathrm{i}]$,$[2]$.

当 μ 取 $[1]$ 时,那么 $[1-\mathrm{i}]^2$ 一定整除 $[x_3+\mathrm{i}]$ 或者 $[x_3-\mathrm{i}]$ 中的一个,则 $N_K([1-\mathrm{i}]^2)\mid N_K([x_3\pm\mathrm{i}])$,$4\mid x_3^2+1$,而 x_3 是奇数,矛盾.

当 μ 取 $[2]$ 时,同理可证得.

故 μ 只能取 $[1-\mathrm{i}]$,$\dfrac{[x_3+\mathrm{i}]}{[1-\mathrm{i}]}\cdot\dfrac{[x_3-\mathrm{i}]}{[1-\mathrm{i}]}=[y_1]^7$,$\left(\dfrac{[x_3+\mathrm{i}]}{[1-\mathrm{i}]},\dfrac{[x_3-\mathrm{i}]}{[1-\mathrm{i}]}\right)=1$,由 $Z[\mathrm{i}]$ 是唯一分解环,可令 $(x_3+\mathrm{i})=(1-\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})^7\ (a,b\in z)$,得:

$$-1=a^7-21a^5b^2+35a^3b^4-7ab^6-b(7a^6-35a^4b^2+21a^2b^4-b^6)$$
$$x_3=a^7-21a^5b^2+35a^3b^4-7ab^6+b(7a^6-35a^4b^2+21a^2b^4-b^6)$$
$$-1=(a+b)^7-14(3a^5b^2+3a^2b^5+ab^6+a^6b)$$

替换成关于 $a+b$ 和 ab 的等式,得 $-1=(a+b)\{(a+b)^6-14[3a^2b^2(a+b)^2-9a^3b^3+ab[(a+b)^2-2ab]^2-a^2b^2(a+b)^2+a^3b^3]\}$,故 $a+b=\pm1$.

当 $a+b=1$ 时,有 $2=14[3a^2b^2(a+b)^2-9a^3b^3+ab[(a+b)^2-2ab]^2-a^2b^2(a+b)^2+a^3b^3]$,矛盾.

当 $a+b=-1$ 时,得到 $-2a^2b^2-4a^3b^3+ab=0$,于是 $ab(4a^2b^2+2ab-1)=0$,则 $ab=0$.

故得出 $a=0,b=-1$ 或者 $a=-1,b=0$ 两组解,代入 x_3 的等式,得到 x_3 的值为1或者 -1,得出原来式(1)方程的解为 $x=8,y=2$ 或者 $x=-8,y=2$.

综上讨论,不定方程 $x^2+64=y^7$ 的有理整数解仅有 $x=\pm8,y=2$.

参考文献:

[1] 高媛媛,郭金保.关于不定方程 $x^2+64=y^5$[J].延安大学学报:自然科学版,2010,29(1):6-7
[2] 高丽,马永刚.关于不定方程 $x^2+16=y^7$[J].西南民族大学学报:自然科学版,2008,34(1):27-29
[3] 李娜.关于不定方程 $x^2+4=y^7$[J].科学技术与工程,2011,23(11):5613-5614
[4] 李中恢,张四保.关于不定方程 $x^2+16=y^{11}$[J].海南大学学报:自然科学版,27(3):216-218
[5] 潘承洞,潘承彪.代数数论[M].济南:山东大学出版社,2003
[6] 柯召,孙琦.谈谈不定方程[M].上海:上海教育出版社,1980

Discussion on the Solution to Diophantine Equation $x^2+64=y^7$

ZHANG Jie

(Mathematics and Statistics College, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: In this paper, by using Gauss domain, the algebraic theory of numbers was used to prove that the Diophantine equation $x^2+64=y^7$ has interger solution, which advanced the study of the Diophantine equation.

Key words: Diophantine equation ; integer solution; domain

责任编辑:李翠薇