文章编号:1672 - 058X(2012)03 - 0012 - 04

Ω 上的传递群的极大子群在 Ω 上的非本原集*

关南星, 陈贵云
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘　要:80 阶循环群 G 通过右乘作用到 81 元域 F_{81} 上,在 F_{81} 的一个 80 个元素的子集合 Ω 上,产生的作用是传递的,这个传递群的极大子群在 Ω 上的轨道可以求得,现主要给出 G 的极大子群在 Ω 的轨道上的非本原集.

关键词:传递作用;轨道;非本原集;极大子群

中图分类号:O152　　**文献标志码**:A

1　预备知识

在群论研究中,常常研究群作用在集合上,如果这个作用是传递的,则讨论传递群非本原性. 这类研究在文献[4-6]中有所涉及. 现主要研究传递群的极大子群在集合的轨道上产生的非本原集.

引理 1[1]　元素个数相同的有限域必同构.

引理 2[2]　有限域的非零元素化成的乘积是一个循环群.

由引理 1,2 知,所有的 81 元域都同构,除去 0 元外的 80 个元素构成的集合 Ω 是一个 80 阶的循环群.

2　主要结果

引理 3　80 阶循环群右乘作用在 Ω 上是传递的. 事实上,因为同阶的循环群是同构的,设 $G = [a] = \Omega$,任意的 $a^n, a^m \in \Omega, m, n \in N$,都有 $a^{n-m} \in G$,使得 $a^{n-m} \cdot a^m = a^n$,由传递作用的定义知,G 右乘 Ω 的每一个元,产生的作用是传递的.

2.1　定理

传递群 G 作用在 Ω 上,他的极大子群在 Ω 上的非本原集如下给出:

(1) G 的极大子群$[a^2]$在 Ω 上的轨道为$[a^2]$,$a[a^2]$.

① 在轨道$[a^2]$上的非本原区域分别有 7 个:

元素个数为 1 的非本原区域:$\Delta_1 = \{1\}, a^2\Delta_1, \cdots, a^{78}\Delta_1$,此类共有 40 个集合;

元素个数为 2 的非本原区域:$\Delta_2 = \{1, a^{40}\}, a^2\Delta_2, \cdots, a^{38}\Delta_2$,此类共有 20 个;

收稿日期:2011 - 08 - 10;修回日期:2011 - 09 - 26.
* 基金项目:重庆市自然科学基金项目(CSTC,2009BB8111).
作者简介:关南星(1987-),女,云南永胜人,硕士研究生,从事代数群论研究.

元素个数为 5 的非本原区域:$\Delta_5=\{1,a^{16},a^{32},a^{48},a^{64}\},a^2\Delta_5,\cdots,a^{14}\Delta_5$,此类共有 8 个;

元素个数为 8 的非本原区域:$\Delta_8=\{1,a^{10},a^{20},\cdots,a^{60},a^{70}\},a^2\Delta_8,a^4\Delta_8,a^6\Delta_8,a^8\Delta_8$,此类共有 5 个;

元素个数为 10 的非本原区域:$\Delta_{10}=\{1,a^8,a^{16},\cdots,a^{64},a^{72}\},a^2\Delta_{10},a^4\Delta_{10},a^6\Delta_{10}$,此类共有 4 个;

元素个数为 20 的非本原区域:$\Delta_{20}=\{1,a^4,a^8,\cdots,a^{72},a^{76}\},a^2\Delta_{20}$,此类共有 2 个.

② 在轨道 $a[a^2]$ 上的非本原区域分别有 7 个:

元素个数为 1 的非本原区域:$a\Delta_1=\{a\},a^3\Delta_1,\cdots,a^{79}\Delta_1$,此类共有 40 个;

元素个数为 2 的非本原区域:$a\Delta_2=\{a,a^{41}\},a^3\Delta_2,\cdots,a^{39}\Delta_2$,此类共有 20 个;

元素个数为 4 的非本原区域:$a\Delta_4=\{a,a^{21},a^{41},a^{61}\},a^3\Delta_4,\cdots,a^{19}\Delta_4$,此类共有 10 个;

元素个数为 5 的非本原区域:$a\Delta_5=\{a,a^{17},a^{33},a^{49},a^{65}\},a^3\Delta_5,\cdots,a^{15}\Delta_5$,此类共有 8 个;

元素个数为 8 的非本原区域:$a\Delta_8=\{a,a^{11},a^{21},\cdots,a^{61},a^{71}\},a^3\Delta_8,a^5\Delta_8,a^7\Delta_8,a^9\Delta_8$,此类共有 5 个;

元素个数为 10 的非本原区域:$a\Delta_{10}=\{a,a^9,a^{17},\cdots,a^{65},a^{73}\},a^3\Delta_{10},a^5\Delta_{10},a^7\Delta_{10}$,此类共有 4 个;

元素个数为 20 的非本原区域:$a\Delta_{20}=\{a,a^5,a^9,\cdots,a^{73},a^{77}\},a^3\Delta_{20}$,此类共有 2 个.

(2) G 的极大子群$[a^5]$在 Ω 上的轨道为$[a^5],a[a^5],a^2[a^5],a^3[a^5],a^4[a^5]$.

① 在轨道$[a^5]$上的非本原集区域分别有 4 个:

元素个数为 1 的非本原区域:$\nabla_1=\{1\},a^5\nabla_1,a^{10}\nabla_1,\cdots,a^{75}\nabla_1$,此类共有 16 个;

元素个数为 2 的非本原区域:$\nabla_2=\{1,a^{40}\},a^5\nabla_2,\cdots,a^{35}\nabla_2$,此类共有 8 个;

元素个数为 4 的非本原区域:$\nabla_4=\{1,a^{20},a^{40},a^{60}\},a^5\nabla_4,\cdots,a^{15}\nabla_4$,此类共有 4 个;

元素个数为 8 的非本原区域:$\nabla_8=\{1,a^{10},a^{20},\cdots,a^{70}\},a^5\nabla_8$,此类共有 2 个.

② 在轨道 $a[a^5]$上的非本原集区域分别有 4 个:

元素个数为 1 的非本原区域:$a\nabla_1=\{a\},a^6\nabla_1,a^{11}\nabla_1,\cdots,a^{76}\nabla_1$,此类共有 16 个;

元素个数为 2 的非本原区域:$a\nabla_2=\{a,a^{41}\},a^6\nabla_2,\cdots,a^{36}\nabla_2$,此类共有 8 个;

元素个数为 4 的非本原区域:$a\nabla_4=\{a,a^{21},a^{41},a^{61}\},a^6\nabla_4,\cdots,a^{16}\nabla_4$,此类共有 4 个;

元素个数为 8 的非本原区域:$a\nabla_8=\{a,a^{11},a^{21},\cdots,a^{71}\},a^6\nabla_8$,此类共有 2 个.

③ 在轨道 $a^2[a^5]$上的非本原集区域分别有 4 个:

元素个数为 1 的非本原区域:$a^2\nabla_1=\{a^2\},a^7\nabla_1,a^{12}\nabla_1,\cdots,a^{77}\nabla_1$,此类共有 16 个;

元素个数为 2 的非本原区域:$a^2\nabla_2=\{a^2,a^{42}\},a^7\nabla_2,\cdots,a^{37}\nabla_2$,此类共有 8 个;

元素个数为 4 的非本原区域:$a^2\nabla_4=\{a^2,a^{22},a^{42},a^{62}\},a^7\nabla_4,\cdots,a^{17}\nabla_4$,此类共有 4 个;

元素个数为 8 的非本原区域:$a^2\nabla_8=\{a^2,a^{12},a^{22},\cdots,a^{72}\},a^7\nabla_8$,此类共有 2 个.

④ 在轨道 $a^3[a^5]$上的非本原集区域分别有 4 个:

元素个数为 1 的非本原区域:$a^3\nabla_1=\{a^3\},a^8\nabla_1,a^{13}\nabla_1,\cdots,a^{78}\nabla_1$,此类共有 16 个;

元素个数为 2 的非本原区域:$a^3\nabla_2=\{a^3,a^{43}\},a^8\nabla_2,\cdots,a^{38}\nabla_2$,此类共有 8 个;

元素个数为 4 的非本原区域:$a^3\nabla_4=\{a^3,a^{23},a^{43},a^{63}\},a^8\nabla_4,\cdots,a^{18}\nabla_4$,此类共有 4 个;

元素个数为 8 的非本原区域:$a^3\nabla_8=\{a^3,a^{13},a^{23},\cdots,a^{73}\},a^8\nabla_8$,此类共有 2 个集合.

⑤ 在轨道 $a^4[a^5]$上的非本原集区域分别有 4 个:

元素个数为 1 的非本原区域:$a^4\nabla_1=\{a^4\},a^9\nabla_1,a^{14}\nabla_1,\cdots,a^{79}\nabla_1$,此类共有 16 个;

元素个数为 2 的非本原区域:$a^4\nabla_2=\{a^4,a^{44}\},a^9\nabla_2,\cdots,a^{39}\nabla_2$,此类共有 8 个;

元素个数为 4 的非本原区域:$a^4\nabla_4=\{a^4,a^{24},a^{44},a^{64}\}$,$a^9\nabla_4$,$\cdots$,$a^{19}\nabla_4$,此类共有 4 个;

元素个数为 8 的非本原区域:$a^4\nabla_8=\{a^4,a^{14},a^{24},\cdots,a^{74}\}$,$a^9\nabla_8$,此类共有 2 个.

2.2 证明

80 阶循环群 $G=[a]$作用到由 80 阶循环群组成的集合 Ω 上,作用是传递的. 这个传递群 G 把集合 Ω 分成互不相交的集合 $S_1,\cdots,S_m$,使得 G 的每个元素通过作用或者把集合 S_i 的元素还变成这些元素,或者把它们变成另外一个集合 $S_j(i\neq j)$的元素. 除去只有一个集合或者每个集合有单独一个元素组成的显然情形,上述 G 是非本原的,而且把集合 $S_1,\cdots,S_m$ 叫做非本原区域[3].

首先,循环群 G 的极大子群有两个:$[a^2]$,$[a^5]$,通过如上的叙述,两个极大子群作用在 Ω 上都会产生各自的轨道,下面给出在轨道上的所有非本原集.

(1) $[a^2]$作用在$[a]$上的轨道是$[a^2]$,$a[a^2]$.

① 先讨论轨道$[a^2]$. 对于$\{a^{2k}\}[a^2]$,$k\in N$,任取 $a^{2m}\in[a^2]$,$m\in N$,有 $a^{2m}\cdot a^{2k}=a^{2(m+k)}$,若$\{a^{2(m+k)}\}\neq\{a^{2k}\}$,则有$\{a^{2(m+k)}\}\cap\{a^{2k}\}=\phi$,所以,含有一个元素的子集合都是非本原集. 这 40 个集合并起来刚好是$[a^2]$,任意两个的交集都是空的.

对于两个元素的子集,设 $\Delta_2=\{1,a^{40}\}$,通过验证,只有元素 1 和 a^{40}能够把 Δ_2 的元素还变到它里面,其余的元素 $a^2,a^4,\cdots,a^{38},a^{42},\cdots,a^{78}$只能把 Δ_2 平行的移动到 $a^2\Delta_2,\cdots,a^{38}\Delta_2$,这些集合中,并且它们两两交是空集,并起来是$[a^2]$. 对于除了这 20 个集合的其他的含 2 个元素的总能找到一个元素不能把它不动或者完全移出去.

设 $\Delta_4=\{1,a^{20},a^{40},a^{60}\}$,只有 $1,a^{20},a^{40},a^{60}$ 把 Δ_4 还变到他本身,其余的元素把 Δ_4 变成和它平行的 $a^2\Delta_4,\cdots,a^{18}\Delta_4$,这 10 个非本原集是第三类.

设 $\Delta_5=\{1,a^{16},a^{32},a^{48},a^{64}\}$,只有 $1,a^{16},a^{32},a^{48},a^{64}$把 Δ_5 还变成它本身,其余的元素把 Δ_5 变成和它平行的 $a^2\Delta_5,\cdots,a^{14}\Delta_5$,这 8 个非本原集是第四类.

设 $\Delta_8=\{1,a^{10},a^{20},\cdots,a^{60},a^{70}\}$,只有 $1,a^{10},a^{20},\cdots,a^{60},a^{70}$把 Δ_{10}还变成它本身,其余的元素把 Δ_{10}变成和它平行的 $a^2\Delta_8,a^4\Delta_8,a^6\Delta_8,a^8\Delta_8$,这 5 个非本原集是第五类.

设 $\Delta_{10}=\{1,a^8,a^{16},\cdots,a^{64},a^{72}\}$,只有 $1,a^8,a^{16},\cdots,a^{64},a^{72}$把 Δ_{10}还变成它本身,其余的元素把 Δ_{10}变成和它平行的 $a^2\Delta_{10},a^4\Delta_{10},a^6\Delta_{10}$,这 4 个非本原集是第六类.

设 $\Delta_{20}=\{1,a^4,a^8,\cdots,a^{72},a^{76}\}$,他的补集合是 $a^2\Delta_{20}$,只有 a^2 把 Δ_{20}变出去,其余的元素还是不变 Δ_{20},这 2 个非本原集是第七类.

接着讨论轨道 $a[a^2]$. 因为 $a[a^2]$是与$[a^2]$是平行的,所以它们的非本原区域也是平行的. 同上面的讨论过程,有定理(1) ②的结论.

(2) G 的极大子群$[a^5]$在 Ω 上的轨道为$[a^5]$,$a[a^5]$,$a^2[a^5]$,$a^3[a^5]$,$a^4[a^5]$.

① 先讨论轨道$[a^5]$上的非本原集区域,对于$\{a^{5k}\}\subseteq[a^5]$,$k\in N$,任取 $a^{5m}\in[a^5]$,$m\in N$,有 $a^{5m}\cdot a^{5k}=a^{5(m+k)}$,若$\{a^{5(m+k)}\}\neq\{a^{5k}\}$,则有$\{a^{5(m+k)}\}\cap\{a^{5k}\}=\phi$,所以,含有一个元素的子集合都是非本原集. 这 16 个集合并起来刚好是$[a^5]$,任意两个的交集都是空的. 所以元素个数为 1 的非本原区域:$\nabla_1=\{1\}$,$a^5\nabla_1$,$a^{10}\nabla_1$,$\cdots$,$a^{75}\nabla_1$,第一类共有 16 个集合;

设$\nabla_2=\{1,a^{40}\}$,只有 $1,a^{40}$把∇_2 还变成它本身,其余$[a^5]$中的元素把它变成 $a^5\nabla_2,\cdots,a^{35}\nabla_2$,这些集合都是非本原集,第二类共有 8 个集合;

设$\nabla_4=\{1,a^{20},a^{40},a^{60}\}$,只有 $1,a^{20},a^{40},a^{60}$把∇_4 变成它本身,其余$[a^5]$中的元素把它变成 $a^5\nabla_4,\cdots$,

$a^{15}\nabla_4$,这四个都是非本原集,第三类共有 4 个集合;

设 $\nabla_8=\{1,a^{10},a^{20},\cdots,a^{70}\}$,只有 a^5,把 ∇_8 变成 $a^5\nabla_8$,其余 ∇_8 中的元素还保持 ∇_8 不动,这两个集合都是非本原集,第四类共有 2 个集合.

② 接着讨论轨道 $a[a^5]$. 因为 $a[a^5]$ 与 $[a^5]$ 是平行的,所以它们的非本原区域也是平行的. 同上面的讨论过程,有上面定理(2) ②的结论.

③ 对于轨道 $a^2[a^5]$,因为 $a^2[a^5]$ 与 $[a^5]$ 是平行的,所以它们的非本原区域也是平行的. 同①的讨论过程,有上面定理(2) ③的结论.

④ 对于轨道 $a^3[a^5]$,因为 $a^3[a^5]$ 与 $[a^5]$ 是平行的,所以它们的非本原区域也是平行的. 同①的讨论过程,有上面定理(2) ④的结论.

⑤ 对于轨道 $a^4[a^5]$,因为 $a^4[a^5]$ 与 $[a^5]$ 是平行的,所以它们的非本原区域也是平行的. 同①的讨论过程,有上面定理(2) ⑤的结论.

至此,定理证明完成.

只要是集合上的传递群,都可以用这个方法把非本原集求出来.

参考文献:

[1] 杨子胥 . 近世代数[M]. 北京:高等教育出版社,2003

[2] 姚慕生. 抽象代数学[M]. 2 版. 上海:复旦大学出版社,1998

[3] 赫尔. 群论[M]. 裘光明,译. 北京:科学出版社,1981

[4] PETER J. CAMERON. Finite permutation groups and finite simple groups[J]. BULL. London Math. Soc,1981,13:1-22

[5] MACPHERSON H D,PETER M. Subgroups of infinite symmetric groups[J]. J London Math Soc,1990,42(2):64-84

[6] PETER J. Transitive permutation Groups without Semiregular Subgroups[J]. J London Math Soc,2002,44(2):325-333

[7] 郭华. 准正交变换的三种等价定义[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(4):360-362

The Imprimitive Sets of Maximal Subgroups of Transitive Group on Ω

GUAN Nan-xing, CHEN Gui-yun

(School of Mathematices and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: The cyclic group G acts on a field F_{81} with 81 elements by right multiplication. This action on a subset Ω with 80 elements of F_{81} is transitive. We can get the orbits of maximal subgroups of the transitive group on Ω. In this paper, the imprimitive sets of the orbits of maximal subgroups on Ω is given.

Key words: transitive action; orbit; imprimitive set; maximal subgroup

责任编辑:田　静