文章编号:1672－058X(2012)02－0020－03

对 Eric van Damme 引理的再探讨

姚国庆

(南开大学 经济学系,天津 300071)

摘　要:双矩阵博弈中的一个著名定理——完美均衡等价于非劣纳什均衡的证明依赖于 van Damme 给出的一个引理. 有研究者认为,Damme 引理的充分条件并不成立,其结果将导致定理有可能不成立. 经过认真研究,得出的结论是,认为 Damme 引理不成立的理由并不充分,而是忽略掉了一个重要条件导致的结果,并对此进行了说明,并给出了 Damme 引理的一个严格证明.

关键词: Damme 引理;双矩阵博弈;矩阵博弈;劣策略

中图分类号:O221.6　　**文献标志码:** A

在《重庆工商大学学报》(自然科学版)2010 年第 2 期发表的"对 Eric van Damme 引理的疑义"一文中[1],谈到 van Damme 所著《纳什均衡的稳定与精炼》一书(1991)中引理 3.2.1 充分性不成立. 由于定理 2[2]的证明,是基于引理 3.2.1,所以引理 3.2.1 是否正确非常重要. 通过仔细阅读《疑义》一文,发现作者的论证存在错误之处,其所给之例子,也无法说明引理不成立. 在此提出不同看法,与作者商榷.

为了讨论的方便,沿用《疑义》一文的表示法和符号.《疑义》一文错误之处出现在对结论(1)的充分性不成立的证明上.

"当 $v(\Gamma(s_1))=0$ 时,即:

$$R(x*,y*)=[R_1(x*,1)-R_1(s_1,1)]y*_1+\cdots+[R_1(x*,n)-R_1(s_1,n)]y*_n=0 \tag{1}$$

可得出对 $\forall l\in\Phi_2$,$[R_1(x*,l)-R_1(s_1,l)]>0$. 由 $C_2(\Gamma(s_1))\neq\Phi_2$,知存在某个 $y*_l=0$,但由这个条件不一定能推出 $[R_1(x*,l)-R_1(s_1,l)]>0$. 因为当 $[R_1(x*,l)-R_1(s_1-l)]=0$ 时,式(1)也能成立."

其错误就在此,因为在双人零和博弈中,你之所得就是他人之所失,因而给定参与者一的策略 $x*$,参与者二所要做的就是选择一个策略 $y*$,尽量使 $v(\Gamma(s_1))$ 最小. 由于 $v(\Gamma(s_1))=0$,所以如果参与者二的一个纯策略 $l\forall C_2(\Gamma(s_1))$(即 l 不是参与者二的最优反应纯策略),那么必有 $x*\Gamma(s_1)e^l>0$,因为如果 $x*\Gamma(s_1)e^l=0$,说明 $x*\Gamma(s_1)e^l=\min_{k\in\Phi_2}x*\Gamma(s_1)e^k=0$,即纯策略 l 是参与者一策略 $x*$ 的最优反应纯策略,这就与 $l\notin C_2(\Gamma(s_1))$ 矛盾.

实际上,对于任何矩阵博弈 A,如果 $(x*,y*)$ 是一个平衡点,那么必有 $x*A\,y*=\min_{y\in S_2}x*Ay<x*A\,y$, $\forall\ y\in S_2$.

如果 $x*A\,y*<x*\,A\,y$,那么 y 必不是参与者二的最优反应策略. 这就意味着,必然存在一个纯策略 l,使得 $x*Ay*<x*Ae^l$(正是由于 $y_l>0$,所以才有了 $x*Ay*<x*Ay$). 即纯策略 l 不可能是 $x*$ 的最优反

收稿日期:2010－07－29;**修回日期:**2011－06－10.

作者简介:姚国庆(1969-),男,云南昆明人,副教授,博士,从事博弈论与公共资源经济学研究.

应,也即 $l \forall C_2(A)$. 反之,如果 $l \forall C_2(A)$,那么只可能 $x*Ay* < x*Ae^l$. 否则矛盾.

《疑义》一文之所以出错,原因就是忽略了矩阵博弈中的这一基本事实,而在 van Damme 对引理 3.2.1 的证明中这一点又被当作不言自明的条件而未单独说明.

《疑义》一文中举了一个例子来说明引理的充分条件不成立,而实际上这个例子是支持引理 3.2.1 的. 根据《疑义》一文,可知矩阵博弈 $\Gamma(s_1)(s_1=(1,0))$ 等于下列矩阵:

$$\Gamma(s_1)=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$$

可知,矩阵博弈 $\Gamma(s_1)$ 存在两个纯策略平衡点:$(x'_1=1,x'_2=0;y*_1=0,y*_2=1)$ 和 $(x''_1=0,x''_2=1;y*_1=0,y*_2=1)$. 参与者一的纯策略 1 在原博弈 Γ 中是劣策略,而在 $\Gamma(s_1)$ 中的两个纯策略平衡点中,参与者二都没有选择纯策略 1(即 $y*_1=0$),即纯策略 $1\notin C_2(\Gamma(s_1))$,这就意味着参与者一的纯策略 1 是劣策略,而 $v(\Gamma(s_1))=0$ 且参与者二的 $C_2(\Gamma(s_1))\neq\Phi_2$. 这与引理 3.2.1 的结论一致,因而《疑义》一文中所引之例子并非反例,不足以推翻引理 3.2.1.

最后,给出引理 3.2.1 的一个严格证明,为了简明和方便,采用矩阵和向量的形式. 不妨设双矩阵博弈 $\Gamma=(A,B)_{m\times n}$,定义一个矩阵博弈 $\tilde{A}(x)=(\tilde{a}_{ij})$,其中 $\tilde{a}_{ij}=a_{ij}-xAe^j$;$i=1,2,\cdots,m$;$j=1,2,\cdots,n$. 行代表参与者一的纯策略,列代表参与者二的纯策略.

van Damme 引理 如果 x 是 Γ 的非劣策略,当且仅当 $v(\tilde{A}(x))=0$,且 $C_2(\tilde{A}(p))=\{1,2,\cdots,n\}$.

证明 首先注意到 $x\tilde{A}(x)=0$,所以 $v(\tilde{A}(x))\geqslant 0$.

证充分条件:不妨设 x 是相对于 x' 的劣策略,那么 $x'A\geqslant xA\Rightarrow x'\tilde{A}(x)\geqslant 0$. 因此,如果 $v(\tilde{A}(x))>0$,显然命题得证(因为 $x\tilde{A}(x)=0$). 如果 $v(\tilde{A}(x))=0$,那么 x' 就是 $\tilde{A}(x)$ 的最优策略,对于任意纯策略 $k\in S_2$,有 $x'\tilde{A}(x)e^k\geqslant x\tilde{A}(x)e^k$,其中至少存在一个 k 使得严格不等式成立(因为 x 是劣策略). 如果 $x'\tilde{A}(x)e^k>0\Leftrightarrow k\notin C_2(\tilde{A}(x))$(因为 $v(\tilde{A}(x))=0$,纯策略 k 不可能是参与者二的最优策略). 综上,如 x 是劣策略,那么要么 $v(\tilde{A}(x))>0$,要么 $v(\tilde{A}(x))=0$ 且 $C_2(\tilde{A}(x))\neq\{1,2,\cdots,n\}$. 所以,如 $v(\tilde{A}(x))=0$ 且 $C_2(\tilde{A}(x))=\{1,2,\cdots,n\}$,必有 x 非劣.

证必要条件:不妨设 x 在 Γ 中非劣,那么显然 $v(\tilde{A}(x))=0$(否则如 $v(\tilde{A}(x))>0$,即知 x 是劣策略,因为 $x\tilde{A}(x)=0$,这就矛盾了). $x'A(x)y*\geqslant v(\tilde{A}(x))$,这样的 x' 是存在的(极小极大定理或纳什定理),不妨设存在一个 $k\in S_2$,$k\notin C_2(\tilde{A}(x))\Rightarrow x'\tilde{A}(x)e^k>\min_{j\in\{1,2,\cdots,n\}}x'\tilde{A}(p)e^j=0$,否则 k 应该是 x' 的最优反应策略. 可知对于任意 $k\in S_2$,$x\tilde{A}(x)e^k\leqslant x'\tilde{A}(x)e^k$,即 x 是劣策略,与 x 非劣矛盾.

参考文献:

[1] 房才雅,丁志良,李玉芳. 对 Eric van Damme 引理的疑义[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27(2):111-112

[2] VAN D E. Stability and Perfection of Nash Equilibria[M]. Berlin:Springer-Verlag,1991

Re-discussion on Eric van Damme Lemma

YAO Guo-qing

(Department of Economics, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: A famous theorem in bimatrix game is that the proof for that perfect equilibrium is equivalent to non-inferior Nash Equilibrium depends on a lemma given by van Damme. Some researchers believe that the sufficient and necessary condition for Damme Lemma is untenable, whose consequence will lead to the falseness of Damme Lemma. After careful study on this, the conclusion is that the reason for the falseness of Damme Lemma is not sufficient, but the result caused by an important condition is neglected, this paper explains this and gives a strict proof for Damme Lemma.

Key words: Damme Lemma; bimatrix game; matrix game; undominated strategy

责任编辑:李翠薇

(上接第 19 页)

S-Countability

ZHAN Xiao-jun

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: The first S-countability axiom and the second S-countability axiom are put forward based on S-base and local S-base in topological space, meanwhile, the relationship among S-base, local S-base, the first S-countability and the second S-countability is discussed, as a result, some new results are obtained.

Key words: semi-open set; S-base; local S-base; S-countability; product space

责任编辑:李翠薇